—— 部分多様体論・湯沢1996 ——

C.Olmosの仕事について

講演者：田崎 博之 (筑波大助教授)

記録者：佐藤 尊文 (筑波大数学)，

廣橋 大悟 (筑波大数学)

1996年11月20日

概 要

C. Olmos の 3 つの論文

(1) The normal holonomy group, Proc.Amer.Math.Soc., 110(1990), 813-818
(2) Normal holonomy groups and s-representation (with E.Heitze), Indiana Univ.M.J., 41(1992), 869-874
(3) Homogeneous submanifolds of higher rank and parallel mean curvature, J.D.G., 39(1994), 605-627

について解説する．

1　第１の論文について

この節では、C.Olmos の論文『**The normal holonomy group**』について解説する．接ベクトル束以外のホロノミー群については、それほど知られていなかったのではないだろうか．その意味でも興味深い論文だと思われる．

1.1　制限法ホロノミー群

この論文の中で扱う **法ホロノミー群** は、一般の Riemann 多様体におけるホロノミー群と似た概念である．これらを対比して理解する為、先ず、一般の Riemann 多様体のホロノミー群について復習する．

(M,g) を一般の Riemann 多様体とし、その Levi-Civita 接続を ∇ とする．M 上の点 x を基点とする閉曲線 c を考える．任意の接ベクトル $X \in T_xM$ を c に沿って ∇ に関して平行移動することにより、T_xM の等長変換が誘導される．このような変換全体は群をなし、しかも点 x のとり方に依存しない．この群を (M,g) のホロノミー群という．

特に、1 点に可縮な閉曲線 c についてだけ考えたとき、これを (M,g) の制限ホロノミー群という．

(M,g) の制限ホロノミー群は、$O(T_xM)$ の連結な Lie 部分群であり、かつ $SO(T_xM)$ のコンパクトな部分群である．さらに、(M,g) のホロノミー群は、制限ホロノミー群が単位元の連結成分となるような Lie 群の構造を持つ．

一方、法ホロノミー群は次のように定義される．

M をある Riemann 多様体 Q^N の部分多様体とし、自然に定まる法ベクトル束の接続を $\nabla^\perp$ とする．M 上の点 x を基点とする閉曲線 c をとり、これに沿って任意の法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ を $\nabla^\perp$ に関して平行移動することにより、$T_x^\perp M$ の等長変換が誘導される．このような変換全体は群をなし、点 x のとり方に依存しない．こうして得られる群を部分多様体 M の **法ホロノミー群** という．

特に、1 点に可縮な c についてだけ考えたとき、**制限法ホロノミー群**という．

1.2 Simons の代数的定式化

Ambrose-Singer の定理は、大雑把に言って、**「(M,g) の曲率テンソル R から、(M,g) のホロノミー群の Lie 環が構成できる」** と主張している．

これと同様なことを、部分多様体の法ホロノミー群についても考えたい．その際、Simons による代数的定式化を使用する．Simons は、次のような **ホロノミー系** という代数系を定めた．

V を内積を持つベクトル空間、R をその上の $(1,3)$-テンソルとする．次の性質

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad R(X,Y) = -R(Y,X) \\
&(2) \quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \\
&(3) \quad \langle R(X,Y)Z, W \rangle = -\langle R(X,Y)W, Z \rangle \\
&(4) \quad \langle R(X,Y)Z, W \rangle = \langle R(Z,W)X, Y \rangle
\end{aligned}
$$

を満たす R を **曲率** という．このとき、Riemann 多様体の場合と同様にして、**スカラー曲率** が定義される．G を $O(V)$ のコンパクトで連結な部分群とし、$\mathfrak{g}$ を G の Lie

環とする．任意の $X, Y \in V$ に対し、$R(X,Y) \in \mathfrak{g}$ となるとき、G を R のホロノミー群といい、$[V, R, G]$ をホロノミー系という．任意の $g \in G$ に対し、$g(R) = R$ となるとき、ホロノミー系 $[V, R, G]$ は **対称** であるという．また、G の V への作用が既約なとき、ホロノミー系 $[V, R, G]$ は **既約** であるという．

ここで、Simons は、次のような定理を述べている．

定理 1.1 (J.Simons)

ホロノミー系 $[V, R, G]$ が既約、かつスカラー曲率が 0 でないならば、

(1) $[V, R, G]$ は対称，または

(2) $G \subset O(V)$ は、階数 1 の対称空間 (i.e. S^n,$P^n(\mathbb{C})$,$P^n(\mathbb{H})$,$P^2(\mathbb{C}ay)$) のホロノミー群と同型

定理 1.2 (J.Simons)

ホロノミー系 $[V, R, G]$ は既約とする．G の部分群で R のホロノミー群となる最小なものを G^R とする．このとき、G^R が V の単位球面に推移的に作用しないならば、$[V, R, G]$ は対称である．

1.3 Olmos の曲率型テンソル

ここからは、M が定曲率空間 Q^N の部分多様体の場合を考える．$\nu(M)$ を M の法ベクトル束、$\nabla^\perp$ をその自然な接続とし、$\nabla^\perp$ の曲率を $R^\perp$ とする．

一般の Riemann 多様体の場合の R に相当するものとして、安直に $R^\perp$ を採用したとすると、$R^\perp(\cdot,\cdot)$ の括弧の中に代入される X, Y 等は TM の元であるのに対し、これらを代入して得られる $R^\perp(X,Y)$ は $\mathrm{End}(\nu(M))$ の元である為、Simons の定式化は使えない．そこで、$R^\perp$ に代わるものとして、Olmos は、以下で述べるようなテンソル $\mathcal{R}^\perp$ を導入した．

A を M のシェイプ作用素とし、$\{ e_j \}_{j=1,\cdots,n}$ を TM の正規直交局所標構場とする．このとき、任意の $\xi_i \in \nu(M)$, $i = 1, 2, 3$ に対し、

$$\mathcal{R}^\perp(\xi_1, \xi_2)\xi_3 = \sum_{j=1}^{n} R^\perp(A_{\xi_1} e_j, A_{\xi_2} e_j)\xi_3$$

とすることにより、M 上のテンソル $\mathcal{R}^\perp$ を定義する．$\mathcal{R}^\perp$ は $\mathfrak{o}(\nu(M))$ の元を誘導する．

$\mathcal{R}^\perp$ は、曲率と同様の代数的性質、すなわち、

(1) $\mathcal{R}^\perp(\xi_1, \xi_2) = -\mathcal{R}^\perp(\xi_2, \xi_1)$

(2) $\mathcal{R}^\perp(\xi_1, \xi_2)\xi_3 + \mathcal{R}^\perp(\xi_2, \xi_3)\xi_1 + \mathcal{R}^\perp(\xi_3, \xi_1)\xi_2 = 0$

(3) $\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1, \xi_2)\xi_3, \xi_4 \rangle = -\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1, \xi_2)\xi_4, \xi_3 \rangle$

(4) $\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1, \xi_2)\xi_3, \xi_4 \rangle = \langle \mathcal{R}^\perp(\xi_3, \xi_4)\xi_1, \xi_2 \rangle$

を満たす．これを示すのに「外の空間が定曲率である」ことを使う．もう少し詳しく言うと、$\bar{R}$ を Q^N の曲率とすると、Ricci の公式は

$$\langle \bar{R}(X,Y)\xi,\eta \rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle$$

と表せる．ただし、$X,Y \in T_xM$、$\xi,\eta \in \nu_x(M)$ である．今、Q^N は定曲率なので、左辺は 0 である．したがって、

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle$$

が成り立つ．

さらに、$R^{\perp}$ と $\mathcal{R}^{\perp}$ とには、次のような関係があることが分かる．

(1) $R^{\perp} = 0 \iff \mathcal{R}^{\perp} = 0$

(2) $R^{\perp} \neq 0 \iff \mathcal{R}^{\perp}$のスカラー曲率 > 0

(3) $\mathrm{span}\{ R^{\perp}(X,Y) : X,Y \in T_xM \} = \mathrm{span}\{ \mathcal{R}^{\perp}(\xi,\eta) : \xi,\eta \in \nu_xM \}$

特に、(3) が重要である．(3) を示す際にも、先程の Ricci の公式を使う．

1.4 定理と証明の概略

この論文の主定理は、次のようなものである．

定理 1.3 (C.Olmos)

M^n を定曲率空間内の連結な部分多様体、$\nu(M)$ を M の法ベクトル束、$\nabla^{\perp}$ をその自然な接続とする．M の制限法ホロノミー群を Φ とすると、

$$\Phi = \Phi_0 \times \Phi_s\,, \qquad \nu(M) = \nu^0 \oplus \nu^s$$

と分解される．ここで、$\Phi_0 = \{1\}$ であり、$\Phi_s \subset O(\nu^s)$ は、ある半単純対称空間の線形イソトロピー群である．

証明には、先程の Simons の結果と Ambrose-Singer の結果が使われる．

テンソル $\mathcal{R}^{\perp}$ を導入し、$R^{\perp}(\cdot,\cdot)$ が生成する群と $\mathcal{R}^{\perp}(\cdot,\cdot)$ が生成する群が等しいこと、すなわち、先程の関係式 (3)) については既に述べた．

Olmos は、さらに、 $\mathcal{R}^{\perp}$ のスカラー曲率が 0 でないことを示し、Simons の結果を使って定理を証明している．

この定理は、定曲率空間内の部分多様体についてのものである．これを一般の空間内の部分多様体の話に拡張するには、途中で使っている Ricci の公式が複雑で難しいであろう．

2　第2の論文について

この節では、C.Olmos と E.Heitze の共著論文『**Normal holonomy groups and s-representation**』について解説する．この論文の議論は、ある意味で第1の論文の逆、すなわち「対称空間の線形イソトロピー群が全て、制限法ホロノミー群として現れるかどうか」ということである．

2.1　対称空間の線形イソトロピー表現の軌道の法ホロノミー群

G/K を非コンパクト型の対称空間とし、G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$,$\mathfrak{k}$ とすると、$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ と分解され、$\mathfrak{p}$ は自然に $T_o(G/K)$ と同一視される．$v \in \mathfrak{p}$ に対して、部分多様体 $K{\cdot}v \subset \mathfrak{p}$ について考える．ただし、「$\cdot$」は K の $\mathfrak{p}$ への作用を表す．

Olmos は、$K{\cdot}v$ の法ホロノミー群について調べた．

制限ルート系から決まる Dynkin 図形を考える．$K{\cdot}v$ の法ホロノミーは、その部分図形 Dynkin 図形としてを持つような対称空間の線形イソトロピー表現と自明な表現との直和になっている．

古典型の場合は、系列があるのでよい．例外型の場合、系列があっても有限個で止まるので、系列内で最大のものは、この形では議論できない．そのようなものについてどうなっているかということは、まだ知られていないようである．

3　第3の論文について

この節では、C.Olmos の論文『Homogenious submanifolds of higher rank and parallel mean curvature』の内容について解説する．

$M \subset R^N$ は Riemann 多様体、$\nu(M)$ は M の法ベクトル束、$\nabla^{\perp}$ を M の法接続として、M の区分的に滑らかな曲線 c に沿った $\nabla^{\perp}$ に関する平行移動を τ_c と表わす．

等長的挿入 $\iota : M \to R^N$ は、$M = M_1 \times M_2$ (Rimann 積)、$\iota_j : M_j \to R^{N_j}$ (等長的挿入)、$j = 1, 2$、$N = N_1 + N_2$ によって $\iota = \iota_1 \times \iota_2$ と表わされるときに、可約であるという．可約でない M を既約であるという．

$K \subset I(R^n)$(コンパクト、連結) の orbit で表わされる M をコンパクト等質という．

$p \in M$ に対して、$\phi_p^{\star}$ を制限法ホロノミー群とする．このとき、

$$\nu_0(M)_p := \{\, \xi \in \nu(M)_p : \phi_p^{*}\xi = \xi \,\}$$

とすれば、$\nu(M)$ の部分ベクトル束 $\nu_0(M)_p$ が定まる．これは、$\nabla^\perp$ に平行で平坦な部分束で極大なものになっている．

そこで、$\nu(M) := \nu_0(M) + \nu_s(M)$、$(\nu_s(M) := \nu_0^\perp(M))$、rank $(M) :=$ rank $(\nu_0(M))$、と表わすことにする．特に、M がコンパクト等質のとき、rank $(M) \geq 1$ であることが簡単に分かる．

定義 3.1

$\nu(M)$ が平坦であり、任意の局所平行ベクトル場 ξ に対して、シェイプ作用素 A_ξ の固有値が一定のとき、M は **等径** であるという．

$M = k \cdot v \subset S^{N-1}$ はコンパクト等質、$r :=$ rank $(M) \geq 2$、$U \subset M$ は一点可縮とする．$\nu_0(M) = \mathrm{span}\{\,\xi_1 \ldots \xi_r\,\}$、($\xi_i$ は $\nu_0(M)$ の平行な断面)、のとき、Ricci の公式より、任意の $\xi, \eta \in C^\infty(U, \nu_0(U))$、$X, Y \in C^\infty(U, T(M))$ に対して、

$$\langle\, [A_\xi, A_\eta]X, Y\,\rangle = \langle\, R^\perp(X, Y)\xi, \eta\,\rangle = 0$$

となることが分かる．よって、$\{A_\xi\}$ は同時対角化可能で、$E_1 \ldots E_g$ を $\{\, a_\xi\,\}$ の同時固有空間による分布とすれば、$\xi \in C^\infty(U, \nu_0(U))$、$X_i \in C^\infty(U, E_i)$ に対して、

$$A_\xi(X_i) = \lambda_i(\xi) X_i$$

となる．

更に、Olmos は、この論文の中で、M がコンパクト等質既約充満のとき、ある $n_1, \ldots, n_g \in C^\infty(U, \nu_0(U))$ が、$A_\xi(Xi) = \lambda_i(\xi)Xi = \langle\, n_i, \xi\rangle Xi$、$(\xi \in C^\infty(U, \nu_0(U))$, $X_i \in C^\infty(U, E_i))$、を満足させていれば、

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \nabla^\perp n_i = 0 \\ &(2) \qquad \nu_0(U) = \mathrm{span}\{\, n_1, \ldots, n_g\,\} \end{aligned}$$

が成り立つ事を証明している．

定義 3.2

N が R^m の部分多様体のとき、$g \in I(R^m)$ が N の $\nabla^\perp$ に関する **transvection** とは、$g(N) = N$、かつ、$p \in N$ に対して、$c(0) = p$、$c(1) = g \cdot p$、$dg|_{\nu(N)_p} = \tau_c$、となる N の曲線 c が存在している場合をいう．$Tr\ (N, \nabla^\perp)$ で N の *transvection* の全体を表わすことにする．同様に、上での $\nu(N)$ をそれぞれ $\nu_0(N)$、$\nu_s(N)$ に変えて、$Tr_0(N, \nabla^\perp)$、$Tr_s(N, \nabla^\perp)$ を定義する．

特に、$\mathrm{Tr}(N,\nabla^\perp) \subset \mathrm{Tr}_0(N,\nabla^\perp) \cap \mathrm{Tr}_s(N,\nabla^\perp)$ が成り立つ．

定理 3.3

K は連結、$M = K \cdot v \subset R^N$ は n 次元コンパクト等質とする．このとき、

(1) $K \subset Tr_s(M,\nabla^\perp)$

(2) M が既約充満で、$n \geq 2$ ならば、$K \subset Tr(M,\nabla^\perp)$ が成り立つ．

この事から、定理が得られる．

定理 3.4 (Theorem C)

$M = K \cdot v \subset R^N$ がコンパクト等質既約充満のとき、任意の $k \in K$、$p \in M$ に対して M 内の区分的に滑らかな曲線 $c : [0,1] \longrightarrow M$ で、$c(0) = p$、$c(1) = k \cdot p$、$dk\|_{\nu(M)_p} = \tau_c^\perp$ を満たすものが存在する．

補題 3.5 (Lemma 5.2)

$H \subset SO(N)$ は連結 Lie 部分群で、R^N への作用が半単純対称空間の線形イソトロピー表現と同値になっているとする．このとき、$N(H)_0$ を $SO(N)$ 内の H の正規化部分群の単位連結成分とすれば、$N(H)_0 = H$ となる．

定理 3.6 (Theorem A)

$M \subset R^N$ が n 次元 $(n \geq 2)$ コンパクト等質既約充満で、$rank\,(M) \geq 2$ のとき、M は既約対称空間の線形イソトロピー表現の $orbit$ になる．

この定理の証明には、論文「 E.Heintze, C.Olmos, G.Thorbergsson, Submanifolds with constant principal curvature and normal holonomy group, Intern.J.Math., Vol.2 (1991)」の次の結果が使われる．：

”R^N の部分多様体 M は、等長的挿入 $\iota : M \longrightarrow R^N$ があるとき、M が一定の主曲率をもつならば、等径部分多様体か、その焦点多様体内の開集合のどちらかであり、その逆も成り立つ．”

M が等径部分多様体ならば、法ベクトル束 $\nu(M)$ の $\nabla^\perp$ に関する曲率テンソルは 0 であり、その場合に限る．一方、M が一定の主曲率をもてば、M 内の任意の曲線 $c(t)$ 上の平行法ベクトル場 $\xi(t)$ に対して、シェイプ作用素 A_ξ の固有値は一定なので、

$$M_\xi := \left\{ \xi(1) \;\middle|\; \begin{array}{l} c : [0,1] \longrightarrow M \\ \xi : [0,1] \longrightarrow \nu(M) \text{ は } c \text{ に沿って平行} \end{array} \right\}$$

とおけば、$\pi : M_\xi \longrightarrow M$ により、M_ξ が等径部分多様体であることが分かるからである．

定理の証明 $M = K \cdot v \subset R^N$ とする．任意の $\xi \in \nu_0(M)_v$ に対して、

$$M_\xi := \left\{ c(1) + \tilde{\xi}(1) \;\middle|\; \begin{array}{l} c : [0,1] \longrightarrow M,\ c(0) = v \\ \tilde{\xi} \text{ は } c \text{ に沿って } \nabla^\perp \text{ 平行で、} \tilde{\xi}(0) = \xi \end{array} \right\}$$

とおいたとき、$M_\xi = K(v + \xi)$ となり、$\nu_0(M_\xi)$ が、大域的に平坦となることが分かる．

M は一定の主曲率を持つので、M は、

(1)　等径部分多様体、又は、
(2)　等径部分多様体の焦点多様体

のいずれかである．

(1) の場合、M は等径等質なので、既約対称空間の線形イソトロピー表現の orbit となる．

(2) の場合も、これの等径部分多様体を $\tilde{M}$ とすれば、codim $(M) \geq 3$ なので、Thorbergsson の結果 (「 G.Thorbergsson, Isoparametric foliations and their buildings Ann. of Math.(2) 133 (1991) 429-446 」) より、$\tilde{M}$ は既約対称空間の線形イソトロピー表現の orbit となる．したがって、この場合も M は既約対称空間の線形イソトロピー表現の orbit となる．(証明終)

定理 3.7 (Theorem B)

$M \subset R^N$ を n 次元コンパクト既約等質 ($n \geq 2$) で、平均曲率ベクトルが平行、M は M を含む最も小さい球面内で極小でないものとする．このとき、M は既約対称空間の線形イソトロピー表現の orbit となる．

証明 rank $(\nu_0(M)) \geq 2$ が分かるので、上の定理から導かれる．(証明終)