平均曲率一定曲面の安定性と一意性について

小磯深幸

(京都教育大学教育学部)

1　はじめに

Γ を 3 次元ユークリッド空間内の Jordan 閉曲線とする．Γ で張られる平均曲率一定曲面の存在についてはよく知られている明快な結果がある（Γ が半径 r の閉球に含まれるとき，$|H| \leq 1/r$ なる任意の $H \in \mathbf{R}$ に対し，Γ で張られる平均曲率一定 H の円板型曲面が存在する）が，その安定性や一意性については，さまざまな予想があるにもかかわらず，あまりよくわかっていない．

本講演では，境界をもつ平均曲率一定曲面の安定性の評価に関する結果及びその一意性の問題への応用について述べたい．

以後，平均曲率一定 ($\neq 0$) のはめ込みのことを CMC 曲面と呼ぶ．CMC 曲面の平均曲率の値 H をも示したいときには，CMC-H 曲面と呼ぶことにする．

さて，たとえば，境界が最も単純な場合，すなわち円周の場合には，それで張られる CMC 曲面の例として，球帽がある．ただし，球帽とは，(標準) 球面を平面で切ったときにできる，円周を境界にもつ 2 つのコンパクト曲面のおのおののことである．円周を境界にもつコンパクトな CMC 曲面は球帽だけであろうというのは自然な予想であるが，[9] により，円周を境界にもつ種数 3 以上のコンパクト CMC 曲面の存在が証明された．この問題については，今なお，次のような予想がある．

予想 1. $\mathbf{R}^3$ 内の円周で張られるコンパクトな CMC 曲面であって安定なものは球帽に限る．

予想 2. $\mathbf{R}^3$ 内の円周で張られるコンパクトな CMC 曲面であって自己交差をもたないものは球帽に限る．

本稿は，研究集会「部分多様体論・湯沢」(湯沢，1997 年 11 月) での講演概要の最後に，2007 年 9 月にその後の発展及び文献を追記したものである．なお，著者の所属は，2007 年 9 月現在，奈良女子大学理学部である．

予想 3. $\mathbf{R}^3$ 内の円周で張られるコンパクトな CMC 曲面であって種数 0 のものは球帽に限る.

とりわけ，自己交差をもたない（すなわち，埋め込まれた）CMC 曲面に対しては，最大値原理や Balancing Formula の応用がしやすいという理由から，予想 2 についてはさまざまな部分的な肯定的結果が知られている (たとえば，[10], [4], [5], [6])．したがって，自己交差をもたない CMC 曲面に問題が帰着できれば，比較的状況が解析しやすい．

このような背景がある一方で，後に述べるような理由 (§4 の系 1) により，次のことがらが予想される．

予想 4. Γ は $\mathbf{R}^3$ 内の Jordan 閉曲線であって，一平面内に含まれるものとする．このとき，Γ で張られるコンパクトな CMC 曲面であって安定なものは，自己交差をもたない．

本講演では，この予想の背景となった，vision number という概念とその安定性との関連について説明し，その議論の一意性の問題へのひとつの応用について述べる．

なお，関連する予想として，次のものをあげておく．

予想 5. Γ は $\mathbf{R}^3$ 内の Jordan 閉曲線であって，一平面内に含まれるものとし，M は Γ で張られるコンパクトな CMC 曲面とする．もしも M が，自己交差をもたないか，または，安定ならば，M の種数は 0 である．

以下，§2 では，CMC 曲面の変分問題の解としての特徴付けについて述べ，§3 では，第 2 変分に対応する固有値問題と安定性の評価について述べ，§4 では，vision number とその応用について述べる．最後の §5 は，2007 年 9 月の追記である．

2　平均曲率一定曲面の変分問題の解としての特徴付け

M を 2 次元の向き付けられた連結な C^∞ 級多様体（境界はあってもなくてもよい）とし，$\mathcal{X}$ を M から $\mathbf{R}^3$ の中へのはめ込みとする．D は M の相対コンパクト領域であって，その境界 ∂D は区分的 C^∞ 級であるとする．$\mathcal{X}$ の面積要素を $d\omega$ で表し，$\mathcal{N} : M \longrightarrow S^2$ を $\mathcal{X}$ の単位法ベクトル場（Gauss 写像）とする．また，$\mathbf{R}^3$ の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ によって表す．このとき，$\mathcal{X}|_D$ の面積 $A_D(\mathcal{X})$ 及び体積 $V_D(\mathcal{X})$ は次のように定義される．

$$A_D(\mathcal{X}) = \int_D d\omega, \quad V_D(\mathcal{X}) = \frac{1}{3}\int_D \langle \mathcal{X}, \mathcal{N}\rangle d\omega$$

特に，M がコンパクトであって境界がなく，しかも $\mathcal{X}$ が単射である場合には，$V_M(\mathcal{X})$ の絶対値は曲面 $\mathcal{X}(M)$ で囲まれる $\mathbf{R}^3$ の領域の体積と一致する．一般には $V_M(\mathcal{X})$ は，$\mathcal{X}(M)$ と原点によって作られる錐の体積を，$\mathcal{X}$ が覆う（向きを考慮して符号を付けた）回数に応じて数え上げたものである．

$A_D(\mathcal{X})$ と $V_D(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}|_D$ が区分的に滑らかであるときにも定義されることに注意しよう．

後のために，実定数 K に対して汎関数 $J_{D,K}$ を

$$J_{D,K}(\mathcal{X}) = A_D(\mathcal{X}) + 2KV_D(\mathcal{X})$$

により定義しておく．

次に，曲面の変分を定義しよう．$\partial D \neq \emptyset$ と仮定する．区分的に滑らかなはめ込み $\mathcal{X}_t : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$ (t はパラメーターで，0 を含むある開区間 $(-\delta, \delta)$ を動く) の族 $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in(-\delta,\delta)}$ が $\mathcal{X}|_D$ の変分であるとは，$\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}|_D$ であって，$\mathcal{X}_t$ が t に関して C^∞ 級であるときをいう．変分 $\{\mathcal{X}_t\}_{t\in(-\delta,\delta)}$ を，簡単に $\mathcal{X}_t$ と書くことが多い．$\frac{\partial \mathcal{X}_t}{\partial t}|_{t=0}$ を $\mathcal{X}_t$ の変分ベクトル場という．

定義 1. $\mathcal{X}_t$ を $\mathcal{X}|_D$ の変分とする．

(1) $\mathcal{X}_t$ が自明であるとは，

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{X}_t}{\partial t}\Big|_{t=0}, \mathcal{N} \right\rangle = 0$$

であるか，または，

$$\mathcal{X}_t \equiv \mathcal{X} \quad \mod (\text{motion in } \mathbf{R}^3)$$

であるときをいう．

(2) $\mathcal{X}_t$ が境界を保つとは，任意の t に対して $\mathcal{X}_t|_{\partial D} = \mathcal{X}|_{\partial D}$ が成り立つときをいう．

(3) $\mathcal{X}_t$ が体積を保つとは，任意の t に対して $V_D(\mathcal{X}_t) = V_D(\mathcal{X})$ が成り立つときをいう．

さて次に，はめ込み $\mathcal{X} : M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ が平均曲率一定であるということの変分問題の解としての特徴付けを述べたい．$\mathcal{X}$ の平均曲率を H で表す．H は M 上の実数値関数である．定数 H_0 を

$$H_0 = \frac{1}{A_D(\mathcal{X})} \int_D H d\omega$$

により定義する．このとき，

FACT 1 (Barbosa - do Carmo). 次の (i) $\sim$ (iii) は同値である．

(i) D 上で，$H \equiv H_0$.

(ii) $\mathcal{X}|_D$ の体積と境界を保つ任意の変分 $\mathcal{X}_t$ に対し，

$$\frac{dA_D(\mathcal{X}_t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

(iii) $\mathcal{X}|_D$ の境界を保つ任意の変分 $\mathcal{X}_t$ に対し，

$$\frac{dJ_{D,H_0}(\mathcal{X}_t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

(ii) の変分問題は，いわゆる条件付き変分問題であり，Lagrange の未定乗数法により (iii) の変分問題に置き換えられる．これら 2 つの変分問題は，その臨界点として同じ曲面族をもつが，それらが極値を与えるかどうかということについては，状況が異なる．したがって，CMC 曲面の安定性という概念を考える際に，どちらの変分問題に対する安定性を採用するかが問題となる．ここでは，物理的に自然と思われる (ii) の変分問題に対応する安定性を採用しよう．

定義 2. $\mathcal{X} : M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ は平均曲率一定 H とし，D は M の相対コンパクト領域であって，∂D は区分的に滑らかであるとする ($\partial D = \emptyset$ でもよい).

(1) $\mathcal{X}|_D$ が安定 (stable) であるとは，$\mathcal{X}|_D$ の体積と境界を保つ任意の非自明な変分 $\mathcal{X}_t$ に対し，

$$\left.\frac{d^2 A_D(\mathcal{X}_t)}{dt^2}\right|_{t=0} > 0$$

が成立するときをいう．

(2) $\mathcal{X}|_D$ が準安定 (weakly stable) であるとは，$\mathcal{X}|_D$ の体積と境界を保つ任意の変分 $\mathcal{X}_t$ に対し，

$$\left.\frac{d^2 A_D(\mathcal{X}_t)}{dt^2}\right|_{t=0} \geq 0$$

が成立するときをいう．

$\mathcal{X}|_D$ は，安定ならば準安定である．一般に，CMC 曲面は，その各点の十分小さい近傍だけを考えれば安定である．また，CMC 曲面 M_0 が安定 (resp. 準安定) ならば，その任意の部分 $M_1 \subset M_0$ もまた安定 (resp. 準安定) であることは，安定性の定義からすぐにわかる．

いくつかの基本的な例をあげておこう．平面，球面，円柱は CMC 曲面の例としてよく知られている．平面と球面は安定である．円柱についてはどうだろうか．半径 r の円柱を考えよう．円柱の，その回転軸に垂直な 2 つの平面のあいだにある部分についてみると，準安定な最大のものは， 2 平面のあいだの距離が $2\pi r$ であるときである．

3　第 2 変分に対応する固有値問題と安定性の評価

CMC 曲面の安定性を調べるためには，対応する変分問題の第 2 変分を知っておく必要がある．以下，$\mathcal{X} : M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を CMC-H 曲面とし，D は M の相対コンパクト領域であって，∂D は区分的に滑らかであるとする．

第 2 変分公式. $\mathcal{X}_t$ は $\mathcal{X}|_D$ の境界を保つ変分とする．$\mathcal{X}_t$ の変分ベクトル場の法成分を $f\mathcal{N}$ で表す．すなわち，

$$f(w) = \left\langle \left.\frac{\partial \mathcal{X}_t(w)}{\partial t}\right|_{t=0}, \mathcal{N}(w) \right\rangle$$

である．このとき，

$$\left.\frac{d^2 J_{D,H}(\mathcal{X}_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \int_D (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) d\omega \tag{1}$$

が成立する．ただしここで，Δ は $\mathcal{X}$ によって誘導される計量による，M 上の (negative) Laplacian であり，$\|B\|^2$ は $\mathcal{X}$ の第 2 基本形式のノルムの 2 乗である．

式 (1) の右辺を $I_D(f)$ とおく．すなわち，

$$I_D(f) = \int_D (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) d\omega$$

である．また，関数空間 $\mathcal{F}_D$ を

$$\mathcal{F}_D = \left\{ f : \overline{D} \longrightarrow \mathbf{R} \;\middle|\; f \text{ is piecewise } C^\infty, f|_{\partial D} = 0, \int_D f d\omega = 0 \right\}$$

によって定義する．このとき，安定性の判定のために有用な次の結果が成立する．

FACT 2. $\mathcal{X}|_D$ が準安定であるのは，すべての $f \in \mathcal{F}_D$ に対して，$I_D(f) \geq 0$ が成り立つとき，かつそのときに限る．

CMC 曲面の安定性や不安定度を評価するのに，第 2 変分に対応する固有値問題を考えることが有効である．$u \in H_0^1(D)$ に対して，

$$Lu = \Delta u + \|B\|^2 u$$

とおく．

$$I_D(u) = -\int_D uLu d\omega$$

である．

固有値問題 $(*)$

$$Lu = -\lambda u, \quad u|_{\partial D} = 0, \qquad u \in H_0^1(D) - \{0\}$$

を考える．これがさきほど述べた第 2 変分公式に対応していることは明らかであろう．

固有値問題 $(*)$ は加算個の固有値

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots, \qquad \lambda_n \longrightarrow +\infty \ (n \longrightarrow +\infty)$$

をもち，λ_1 に属する固有関数は D 上定符号であることが知られている．

$$Lu = -\lambda u, \qquad u \neq 0$$

とすると，

$$I_D(u) = \lambda \int_D u^2 d\omega$$

であるから，

$$I_D(u) < 0 \iff \lambda < 0$$

が成立する．したがって，

$$\left\{ u \,\middle|\, u|_{\partial D} = 0, I_D(u) < 0 \right\} = \Big((*) \text{ の負の固有値に属する固有関数全体で張られる空間 } \Big)$$

である．

定義 3.
$\mathrm{Ind}(D) =$ 固有値問題 $(*)$ の負の固有値の個数 (重複度も数える)
$\mathrm{Null}(D) =$ 固有値問題 $(*)$ の 0 固有値の個数 (重複度も数える)

FACT 3. $D_1 \subset D_2$ ならば，$\mathrm{Ind}(D_1) \leq \mathrm{Ind}(D_2)$ である．

CMC 曲面が安定であるかどうかを判定するのに，次の結果が助けになる．

定理 1. 次の (1), (2) のいずれかが成立するとき，$\mathcal{X}|_D$ は準安定ではない．
(1) $\mathrm{Ind}(D) \geq 2$
(2) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ であり，λ_2 に対応する固有関数 g が $\int_D g d\omega \neq 0$ をみたす.

証明. f, g をそれぞれ λ_1, λ_2 に対応する固有関数とする．Green の公式により，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D (f\Delta g - g\Delta f) d\omega \\ &= \int_D \{-f(\lambda_2 + \|B\|^2) g + g(\lambda_1 + \|B\|^2) f\} d\omega \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_D fg d\omega \end{aligned}$$

である．$\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ だから，

$$\int_D fg d\omega = 0 \tag{2}$$

が成立する．

$$\mathcal{X}(s,t) = \mathcal{X} + (sf + tg)\mathcal{N}, \quad s, t \in \mathbf{R}$$

とおく．方程式

$$V_D(\mathcal{X}(s,t)) = V_D(\mathcal{X}) \text{ (: constant)} \tag{3}$$

を考える．

$$\left. \frac{\partial V_D(\mathcal{X}(s,t))}{\partial s} \right|_{(s,t)=(0,0)} = \int_D f d\omega$$

であり，f は D 上定符号だから，

$$\left. \frac{\partial V_D(\mathcal{X}(s,t))}{\partial s} \right|_{(s,t)=(0,0)} \neq 0$$

である．したがって，方程式 (3) に陰関数定理が適用できる．すなわち，$t=0$ の近傍で定義された t の C^∞ 級関数 $\varphi(t)$ が存在して，

$$V_D(\mathcal{X}(\varphi(t),t)) = V_D(\mathcal{X}) \tag{4}$$

をみたし，

$$\varphi'(0) = -\Big(\frac{\partial V_D(\mathcal{X}(s,t))}{\partial t}\Big|_{(s,t)=(0,0)}\Big)\Big(\frac{\partial V_D(\mathcal{X}(s,t))}{\partial s}\Big|_{(s,t)=(0,0)}\Big)^{-1} = -\frac{\int_D g d\omega}{\int_D f d\omega} \tag{5}$$

である．さらに，

$$\int_D (\varphi'(0)f+g)d\omega = \frac{dV_D(\mathcal{X}(\varphi(t),t))}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{6}$$

である．一方，I_D の定義と (2) により，

$$\begin{aligned} I_D(\varphi'(0)f+g) &= -\int_D \{\Delta(\varphi'(0)f+g) + \|B\|^2(\varphi'(0)f+g)\}(\varphi'(0)f+g)d\omega \\ &= -\int_D (-\lambda_1\varphi'(0)f - \lambda_2 g)(\varphi'(0)f+g)d\omega \\ &= \lambda_1\varphi'(0)^2\int_D f^2 d\omega + \lambda_2\int_D g^2 d\omega \end{aligned}$$

である．これと (5) から，仮定 (1) または (2) がみたされれば，

$$I_D(\varphi'(0)f+g) < 0 \tag{7}$$

が成立することがわかる．よって，FACT 2, (6), (7) により，$\mathcal{X}|_D$ が準安定でないということがわかる．(証明終)

4　Vision number とその応用

さて，では，$\mathrm{Ind}(D)$ を評価するにはどうすればよいだろうか．vision number という非常に視覚的な概念が時として有効である．

$\mathcal{X}: M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ は CMC 曲面，$\mathcal{N}: M \longrightarrow S^2$ は $\mathcal{X}$ の Gauss 写像であった．ν を $\mathbf{R}^3$ の単位ベクトルとする．

$$\eta(M;\nu) = \{w \in M | \mathcal{N}(w) \perp \nu\}$$

とおく．次の補題が成立する．

補題 1. $u = \langle \mathcal{N}, \nu \rangle$ とおく．すると，M 上 $Lu=0$ であり，$\eta(M;\nu)$ 上 $u=0$ である．したがって，u は $M-\eta(M;\nu)$ の各連結成分上での固有値問題 $(*)$ の 0 固有値に属する固有関数である．

さて今，vision number $v(M;\nu)$ を

$$v(M;\nu) = \Big(M - \eta(M;\nu) \text{ の連結成分の個数 }\Big)$$

によって定義しよう．この概念は Choe によって，極小曲面 $\mathcal{X}$ に対して定義された ([7])．次の定理 2 は概ね Choe ([7]) の議論と同様に，Morse の指数定理を用いることにより証明される．

定理 2 ([11])． M はコンパクトとする．(境界はあってもなくてもよい．) $\mathcal{X}: M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ は平均曲率一定とし，$\mathcal{N}$ を $\mathcal{X}$ の単位法ベクトル場とする．$\mathbf{R}^3$ の任意の単位ベクトル ν と M° (M の内部) の相対コンパクト領域 D ($\partial D \neq \emptyset$) があって，$\partial D$ 上

$$\nu \perp \mathcal{N}$$

が成り立つとする．するとこのとき，

$$\mathrm{Ind}(M) \geq v(D;\nu)$$

が成立する．

証明の方針． $v(D;\nu) = n$ とし，$D - \eta(D;\nu)$ の連結成分を $V_1, ..., V_n$ とする．M の領域の単調減少な 1 助変数族 $\{D_t\}_{0\leq t\leq n+1}$ を，$D_0 = M, D_1 = D, \partial D_j \subset \eta(\overline{D};\nu)$ $(j = 1,...,n), D_{n+1} \subset V_n$ をみたすようにとることができる．補題 1 より，$\mathrm{Null}(D_j) \geq 1$ $(j = 1,...,n)$ である．Morse の指数定理により，

$$\mathrm{Ind}(M) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Null}(D_j) \geq n$$

となり，定理 2 が証明された．

定理 1 と定理 2 から次が成立する．

系 1． 定理 2 の仮定のもとで，$v(D,\nu) \geq 2$ ならば，$\mathcal{X}|_D$ は準安定ではない．

なお，§1 で述べた予想 4 は，系 1 から予想した．

また，定理 1 と定理 2，あるいは系 1 を用いることにより，CMC 曲面の具体例について，その安定性の評価を行うことができる．たとえば，平均曲率一定の回転面 (Delaunay 曲面) のうち，unduloid と nodoid について考えてみよう．M を unduloid または nodoid とする．$\mathbf{R}^3$ の直交座標系 (x,y,z) を適当にとれば，M は半平面 $\{(x,0,z) \in \mathbf{R}^3 | x > 0\}$ 内の周期的な曲線 C を，z-軸のまわりに回転することにより得られる回転面である．$\nu = (0,0,1)$ とおく．C 上で，x-座標の最大値，および，最小値をとる点に対応する M 上の円のそれぞれを，M のふしと呼ぶことにしよう．M の各ふしにおいては，$\nu \perp \mathcal{N}$ が成立する．したがって，M の連結部分集合であって，隣り合った 3 つのふしをその内部に含むようなものは，準安定ではないことが，系 1 からわかる．また，M が nodoid の場合には，$\nu = (0,1,0)$ とおくことにより，別のタイプの非準安定領域を得ることができる．

最後に，この節で述べた考え方の，CMC 曲面に対する自由境界問題への応用について触れたい．π_1, π_2 を $\mathbf{R}^3$ 内の 2 つの互いに平行な平面とし，これらで囲まれる領

域を Ω とする．簡単のため，π_1, π_2 は (x, y) 平面に平行としよう．V_0 を定数とする．$\pi_1 \cup \pi_2$ 上に境界をもち，$\overline{\Omega}$ 内にある自己交差をもたないコンパクト曲面 M であって，$\partial M \cup \pi_1 \cup \pi_2$ が囲む領域の体積がちょうど V_0 であるもの全体を $\mathcal{S}(V_0)$ とおく．$\mathcal{S}(V_0)$ での面積の臨界点を求めるという問題を考えよう．これは，CMC 曲面に対する自由境界問題の 1 つである．なぜなら，第 1 変分を計算することにより，解は CMC 曲面であることがわかるからである．同時に，解が π_1, π_2 に直交することもわかる．自己交差をもたない CMC 曲面に Alexandrov reflection methods を適用することにより，解は回転面であることがわかる．したがって解は，半球面，円柱，および，unduloid のふしとふしのあいだの部分であることがわかる．これらうち，unduloid の安定性について考えよう．ただし，解 $M \in \mathcal{S}(V_0)$ が安定であるとは，M の任意の非自明な変分 $\{M_t\} \subset \mathcal{S}(V_0)$ に対して，面積の第 2 変分が $t = 0$ において正であることと定義する．(すなわち，定義 2 の変分を $\mathcal{S}(V_0)$ で考える．) unduloid の隣り合った 2 つのふしのあいだの部分を D とする．実は，D は安定でないことが Athanassenas, Vogel により独立に証明されている ([3], [17]) が，その別証明が次のようにして得られる．$\nu = (0, 0, 1), \mu = (1, 0, 0)$ に対して，$f = \langle \mathcal{N}, \nu \rangle, g = \langle \mathcal{N}, \mu \rangle$ とおけば，D 上 f は定符号であり，$Lf = 0, Lg = 0$ である．よって，定理 1 の証明と同様にして，体積を保つ非自明な変分 $\mathcal{X}(\varphi(t), t)$ が得られ，これに対する面積の第 2 変分について $I_D(\varphi'(0)f + g) = 0$ が得られる．よって，D は安定ではない．ここで，変分 $\mathcal{X}(\varphi(t), t)$ は境界を保たないが，境界が $\pi_1 \cup \pi_2$ 上にあるという条件はみたす．なお，実際は，Athanassenas, Vogel は，より強く，D が準安定でないことを証明した．また，半球面と短い円柱 (半径を r とすると，高さが πr 以下の円柱) は準安定であることも示されている．

5　追記 (2007 年 9 月)

この節では，本稿の内容についての 1997 年以降の発展について簡単に述べる．

§1 で述べた予想 1 または 2 の部分的肯定的な結果として，次の定理が証明された．

定理 3 (Alías-Lopez-Palmer [2])． $\mathbf{R}^3$ 内の円周で張られるコンパクトな CMC 曲面であって安定かつ種数 0 のものは球帽に限る．

また，§3 で述べた定理 1 を発展させ，CMC 曲面の安定性・不安定性を判定する方法として，下記の定理 4 を得た．今，M はコンパクトとし，$\mathcal{X} : M \to \mathbf{R}^3$ は CMC 曲面とする．固有値問題 $(*)$ (§3 参照．ただし，$D = M$ とする．) が 0 固有値をもつときには，0 固有値に属する固有空間を E, その L^2 ノルムでの直交補空間を $E^\perp$ で表す．また，CMC 曲面は，準安定でないとき不安定であるということにする．

定理 4 ([12]). (I) $\lambda_1 \geq 0$ ならば，$\mathcal{X}$ は準安定である．
(II) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ のとき，$Lu = 1$ を満たす $u \in C_0^{3+\alpha}(M)$ が一意的に存在して，次が成立する．

(II-1) $\int_M u d\omega \geq 0$ ならば，$\mathcal{X}$ は準安定である．

(II-2) $\int_M u d\omega < 0$ ならば，$\mathcal{X}$ は不安定である．

(III) $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$ のとき，

(III-A) λ_2 に属する固有関数 g で $\int_M g d\omega \neq 0$ なるものが存在するならば，$\mathcal{X}$ は不安定である．

(III-B) λ_2 に属する任意の固有関数 g に対して $\int_M g d\omega = 0$ であるならば，$Lu = 1$ を満たす $u \in E^\perp \cap C_0^{3+\alpha}(M)$ が一意的に存在して，次が成立する．

(III-B1) $\int_M u d\omega \geq 0$ ならば，$\mathcal{X}$ は準安定である．

(III-B2) $\int_M u d\omega < 0$ ならば，$\mathcal{X}$ は不安定である．

(IV) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ならば， $\mathcal{X}$ は不安定である．

なお，この定理の (II) 及び (III) における判定法は直観的に見づらいが，(II) は，CMC 曲面の変形に関する結果を用いることにより，幾何学的に見やすいものに言い換えることができる ([12])．

また，定理 4 の類似が，より一般の変分問題や自由境界問題，部分的自由境界問題に対しても成立し，この方法は，[13], [14], [15] において，曲面の変分問題の解の安定性を決定するために本質的な役割を果たした．

§4 の最後に述べた自由境界問題についても，その後，大きな発展があった．支持平面 π_1, π_2 上での濡れエネルギーをも考慮した変分問題に対する安定解の決定と一意性に関する結果が，[18], [8], [19], [20] によって得られた．また，これらの研究とは独立に，より一般のエネルギー汎関数 (非等方的表面エネルギー．特別な場合として，面積汎関数を含む．) に対する同様の変分問題の安定解の決定と一意性に関する結果が，[14], [15], [16] によって，より見通しの良い方法を用いることにより得られた．

References

[1] Alexandrov, A. D., A characteristic property of spheres, *Ann. Mat. Pura Appl.* **58** (1962), 303–315.

[2] Alías, L., Lopez, R., and Palmer, B., Stable constant mean curvature surfaces with circular boundaries, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 1195–1200.

[3] Athanassenas, M., A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary, *J. Reine Angew. Math.* **377** (1987), 97–107.

[4] Barbosa, J. L., Hypersurfaces of constant mean curvature on $\mathbf{R}^{n+1}$ bounded by an euclidean sphere, *Geometry and Topology II*, World Scientific (1990), 1–9.

[5] Barbosa, J. L., Constant mean curvature surfaces bounded by a plane curve, *Matemática Contemporânea* **1** (1991), 3–15.

[6] Brito, F., Earp, R., Meeks III, W. H., and Rosenberg H., Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve, *Indiana Univ. Math. J.* **40** (1991), 333–343.

[7] Choe, J., Index, vision number and stability of complete minimal surfaces, *Arc. Rat. Mech. Anal.* **109** (1990), 195–212.

[8] Finn, R. and Vogel, T. I., On the volume infimum for liquid bridges, *Z. Anal. Anwendungen* **11** (1992), 3–23.

[9] N. Kapouleas, Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space, *J. Diff. Geom.* **33** (1991), 683–715.

[10] Koiso, M., Symmetry of hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary, *Math. Zeit.* **191** (1986), 567–574.

[11] Koiso, M., The stability and the vision number of surfaces with constant mean curvature, *Bulletin of Kyoto University of Education* **Ser.B, 92** (1998), 1–11.

[12] Koiso, M., Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature, *Tohoku Math. J. (2)* **54** (2002), 145–159.

[13] Koiso, M. and Palmer, B., On a variational problem for soap films with gravity and partially free boundary, *Journal of the Mathematical Society of Japan* **57** (2005), 333–355.

[14] Koiso, M. and Palmer, B., Stability of anisotropic capillary surfaces between two parallel planes, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **25** (2006), 275–298.

[15] Koiso, M. and Palmer, B., Anisotropic capillary surfaces with wetting energy, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **29** (2007), 295–345.

[16] Koiso, M. and Palmer, B., Uniqueness theorems for stable anisotropic capillary surfaces, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **39**, (2007), 721–741.

[17] Vogel, T. I., Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes, *SIAM J. Appl. Math.* **47** (1987), 516–525.

[18] Vogel, T. I., Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes II, General contact angles, *SIAM J. Appl. Math.* **49** (1989), 1009–1028.

[19] Zhou, L., On the volume infimum for liquid bridges, *Z. Anal. Anwendungen* **12** (1993), 629–642.

[20] Zhou, L., Stability of liquid bridges, PhD Thesis, Stanford Univ. (1995).