# $S^3$ 内の平坦トーラスの等長的変形

北川 義久（宇都宮大学）

## 序

$S^3$ を 3 次元単位球面とし，$p: S^3 \to S^2$ を Hopf 写像とする．$\gamma$ を $S^2$ 上の閉曲線とすると，逆像 $p^{-1}(\gamma)$ は $S^3$ 内の flat torus である．これは *Hopf torus* と呼ばれている ([8])．$\gamma$ が円であれば，$p^{-1}(\gamma)$ は Clifford torus である．

1975 年頃,「$S^3$ 内の flat torus を分類せよ」という問題が Yau [12, p. 87] により提起されたが，この頃知られていた $S^3$ 内の flat torus の例は上に述べた Hopf torus だけであった ([10]).

一方，$S^3$ 内の flat 曲面の構成法が Bianchi[1], Sasaki[9] により与えられていた. $\alpha$, $\beta$ を $S^3$ 内の曲線で，$\alpha$ の torsion $= 1$, $\beta$ の torsion $= -1$ を満たすものとする．$S^3$ の群構造を用いて

$$F(s,t) = \alpha(s)\beta(t)$$

と定めると，$F$ は $S^3$ 内の flat 曲面である ([11, p.139 - 163]).

この構成法を用いれば，Frenet-Serret の微分方程式から出発して $S^3$ 内に torsion $= \pm 1$ の曲線を作ることにより，非常に多くの完備 flat 曲面を $S^3$ 内に構成することができる．しかし，このように構成された曲面が torus になるかどうかの判定は容易ではなく，Hopf torus 以外に $S^3$ 内の flat torus が存在するかどうかは不明であった.

ところが，最近 $S^2$ 上の任意の閉曲線から $S^3$ 内に torsion $= \pm 1$ の閉曲線を具体的に作る方法が開発され，これを Bianchi, Sasaki の構成法と融合させることにより $S^3$ 内のすべての flat torus を構成する方法が明らかになった ([3]).

この構成法を用いて $S^3$ 内の flat torus を調べることにより，色々な結果が得られる．たとえば「$S^3$ 内には Hopf torus 以外にも flat torus が存在する」ことが示される．さらに「$S^3$ 内に等長的に埋め込まれた flat torus は $S^3$ の対蹠写像で不変である」ことが示され ([5])，この結果を用いて $S^3$ 内の Clifford torus の剛性定理が得られる ([2]).

本講演では，まずこの構成法について説明し，さらに $S^3$ 内の flat torus の等長的変形に関する問題への応用について述べる．

## 1. $S^3$ 内の FLAT TORUS の構成法

$\mathbb{H}$ を４元数全体の集合とし，$\mathbb{R}^4$ と $\mathbb{H}$ を同一視する．

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}.$$

単位球面 $S^3$ と $S^2$ を

$$S^3 = \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}, \quad S^2 = \{x \in \operatorname{Im}\mathbb{H} : |x| = 1\}$$

と定める．$S^3$ は $\mathbb{H}$ での積によって群になる．$S^2$ の単位接 bundle $US^2$ を $S^2 \times S^2$ の部分集合と同一視する．すなわち

$$US^2 = \{(x, v) \in S^2 \times S^2 : \langle x, v \rangle = 0\},$$

ただし自然な射影 $p_1 : US^2 \to S^2$ を $p_1(x, v) = x$ により与える．次に $p_2 : S^3 \to US^2$ を

$$p_2(a) = (a\mathbf{i}a^{-1}, a\mathbf{j}a^{-1})$$

により定めると，$p_2$ は２重被覆で $p_2(-a) = p_2(a)$ を満たしている．

ここで正則曲線 $\gamma : \mathbb{R} \to S^2$ を考えよう．$US^2$ 内の曲線 $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to US^2$ を

$$\hat{\gamma}(s) = (\gamma(s), \gamma^{'}(s)/|\gamma^{'}(s)|)$$

と定め，$c : \mathbb{R} \to S^3$ を $p_2$ による $\hat{\gamma}$ のリフトとする．このとき

$$c(s) \text{ の torsion} = 1, \quad c(s)^{-1} \text{ の torsion} = -1 \tag{1.1}$$

であることが証明できる．次に $\gamma(s)$ は周期的であるとし，$l > 0$ を $\gamma$ の最小周期とする．閉曲線 $\hat{\gamma} : [0, l] \to US^2$ が属する homology 類を $I(\gamma)$ とかく．

$$I(\gamma) \in H_1(US^2).$$

$US^2 \cong \mathbb{R}P^3$ だから $I(\gamma) = 0$ または $I(\gamma) = 1$ である．$c(s)$ の周期性については次のことが分かる．

$$c(s + l) = \begin{cases} c(s) & if \quad I(\gamma) = 0, \\ -c(s) & if \quad I(\gamma) = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

以上の事実と Bianchi, Sasaki の構成法を組み合わせると $S^3$ 内の flat torus の構成法が得られる．これをもう少し詳しく説明しよう．

**定義．** $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が *periodic admissible pair* (p.a.p.) であるとは，次の (a) - (c) を満たすことである．

(a)　$\gamma_i : \mathbb{R} \to S^2$ は周期的正則曲線,

(b)　$k_i(s)$ を $\gamma_i(s)$ の測地曲率とすると，$(1 + k_i(s)^2)|\gamma_i'(s)|^2 = 4$,

(c)　任意の $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ について $k_1(s_1) > k_2(s_2)$.

さて，$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とし，$c_i(s)$ を $p_2$ による $\hat{\gamma}_i(s)$ のリフトとする．$S^3$ の群構造を用いて $F_\Gamma : \mathbb{R}^2 \to S^3$ を

$$F_\Gamma(s_1, s_2) = c_1(s_1)c_2(s_2)^{-1} \tag{1.3}$$

と定める．$F_\Gamma$ は はめ込みであり，$F_\Gamma$ により $\mathbb{R}^2$ に誘導されるリーマン計量を $g$ とすると $g$ は flat である．次に群

$$G(\Gamma) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2) : F_\Gamma \circ \varphi = F_\Gamma\}$$

を考える．$G(\Gamma)$ の元は $\mathbb{R}^2$ の平行移動であることが分かるので $G(\Gamma)$ は自然に $\mathbb{R}^2$ の部分群とみなせる．さらに $G(\Gamma)$ は $\mathbb{R}^2$ の lattice であることが分かり，flat torus

$$M_\Gamma = (\mathbb{R}^2, g)/G(\Gamma)$$

および $f_\Gamma \circ \pi = F_\Gamma$ を満たす等長はめ込み

$$f_\Gamma : M_\Gamma \to S^3$$

が得られる．ただし $\pi : \mathbb{R}^2 \to M_\Gamma$ は自然な射影である．このとき $f_\Gamma$ は *primitive* である．すなわち $f_\Gamma \circ \varphi = f_\Gamma$ を満たす $\varphi \in \mathrm{Diff}(M_\Gamma)$ は $M_\Gamma$ の恒等写像に限る．

**定理 1** ([5])**.** $M$ を flat torus, $f : M \to S^3$ を primitive な等長はめ込みとすると，p.a.p. $\Gamma$ が存在し $f \equiv f_\Gamma$. すなわち，$S^3$ の合同変換 $A$ と微分同相写像 $\rho : M \to M_\Gamma$ が存在し $A \circ f = f_\Gamma \circ \rho$.

**注意 1.** $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ を p.a.p. とすると

$$f_\Gamma \text{ の平均曲率が一定} \iff \gamma_1, \gamma_2 \text{ がともに円.}$$

次に $M_\Gamma$ のリーマン構造について述べる．$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ とし，

$$L(\gamma_i) = \int_0^{l_i} |\gamma_i'(s)| ds, \quad K(\gamma_i) = \int_0^{l_i} k_i(s) |\gamma_i'(s)| ds$$

と定める．ただし $l_i$ は $\gamma_i$ の最小周期である．さらに $v_i = \frac{1}{2}(K(\gamma_i), L(\gamma_i))$ とおき，$\mathbb{R}^2$ の lattice $W(\Gamma)$ を次のように定める．

$$W(\Gamma) \text{ の生成元} = \begin{cases} v_1,\ v_2 & if \quad I(\Gamma) = (0,0), \\ 2v_1,\ v_2 & if \quad I(\Gamma) = (1,0), \\ v_1,\ 2v_2 & if \quad I(\Gamma) = (0,1), \\ v_1 \pm v_2 & if \quad I(\Gamma) = (1,1), \end{cases}$$

ただし $I(\Gamma) = (I(\gamma_1), I(\gamma_2))$ である．このとき

**定理 2** ([6])**.** $M_\Gamma$ は $\mathbb{R}^2/W(\Gamma)$ に等長同形である．

## 2. $S^3$ 内の FLAT TORUS の等長的変形

ここでは，§1 で説明した構成法を用いて $S^3$ 内の flat torus の等長的変形について考察する．$f : M \to S^3$ を 2 次元 flat torus $M$ から 3 次元単位球面 $S^3$ への等長はめ込みとする．$f$ の等長的変形 $f_t : M \to S^3$ が存在し $f_0$ と $f_1$ が合同でないとき，$f$ は変形可能であるという．

**定理 3** ([6])**.** もしも $f$ の平均曲率が一定でなければ，$f$ は変形可能である．

証明の概略．$f$ は primitive としてよい．定理 1 より $f \equiv f_\Gamma$ をみたす p.a.p. $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が存在する．注意 1 より $\gamma_1$, $\gamma_2$ のどちらかは円でない．すると $L(\gamma_i)$, $K(\gamma_i)$, $I(\gamma_i)$ を保存する $\Gamma$ の変形で自明でないものが作れる．定理 2 より，この変形は $f$ の非自明な等長的変形をひきおこすことが分かり，定理 3 が得られる．

次に，平均曲率が一定な $f$ について変形可能かどうかという問題を考えてみたい．正定数 $R_1$, $R_2$ を $R_1^2 + R_2^2 = 1$ となるように選び，等長はめ込み $F : \mathbb{R}^2 \to S^3$ を

$$F(x_1, x_2) = \left( R_1 \cos \frac{x_1}{R_1},\ R_1 \sin \frac{x_1}{R_1},\ R_2 \cos \frac{x_2}{R_2},\ R_2 \sin \frac{x_2}{R_2} \right)$$

と定める．$F$ の像は $S^1(R_1) \times S^1(R_2)$ であり，$F$ の平均曲率は $(R_2^2 - R_1^2)/2R_1R_2$ である．$\mathbb{R}^2$ の部分群を $G_0 = \{v \in \mathbb{R}^2 : F(x+v) = F(x)\}$ と定めると，

$$G_0 = \{(2\pi R_1 n_1,\ 2\pi R_2 n_2) :\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

である．$G$ を $G_0$ の部分群とし，$\mathbb{R}^2/G$ はコンパクトであるとする．このとき flat torus $\mathbb{R}^2/G$ と等長はめ込み

$$F/G : \mathbb{R}^2/G \to S^3$$

が得られ，$F/G$ の平均曲率は一定である．逆に，flat torus から $S^3$ への平均曲率一定な等長はめ込みはすべてこのようにして得られる．以上のことから，上に述べた問題は次のように表現できる．

**問題.** $G$ を $\mathbb{R}^2/G$ がコンパクトであるような $G_0$ の部分群とする．このような $G$ のうち，$F/G : \mathbb{R}^2/G \to S^3$ が変形可能なものを決定せよ．

以下，この問題について考察する．

**例 1** ([4]). もし $f_t : \mathbb{R}^2/G_0 \to S^3$ が $F/G_0$ の等長的変形ならば，各 $t$ に対して $S^3$ の合同変換 $A_t$ が存在し $f_t = A_t \circ f_0$. すなわち，$F/G_0$ の等長的変形は自明なものに限る．

整数 $n \geq 1$ に対して，$G_0$ の部分群 $W_+(n)$ と $W_-(n)$ を

$$W_\pm(n) = \{(2\pi R_1 n_1, 2\pi R_2 n_2) : n_1 \pm n_2 \in n\mathbb{Z}\}$$

と定める．

**例 2.** もし $n \geq 2$ ならば，$F/W_+(n)$ と $F/W_-(n)$ はそれぞれ変形可能である．これは，$S^2$ 上の $n$ 重 circle に対応する Hopf torus が $n \geq 2$ のとき変形可能であることから分かる．

さらに，次のことが分かる．

**例 3.** 整数 $n \geq 2$ が存在し $G \subset W_+(n)$ または $G \subset W_-(n)$ ならば，$F/G$ は変形可能である．

実は，$F/G$ が変形可能となるのは $G$ が例 3 の条件を満たす場合に限ることが分かる．すなわち

**定理 4** ([7]). $G$ を $\mathbb{R}^2/G$ がコンパクトであるような $G_0$ の部分群とすると，次の (1) と (2) は同値である．

(1) 整数 $n \geq 2$ が存在し，$G \subset W_+(n)$ または $G \subset W_-(n)$,

(2) $F/G$ は変形可能である．

証明の概略．(2) $\Rightarrow$ (1) を示せばよい．写像 $\sigma : G_0 \to G_0$ を

$$\sigma(2\pi R_1 n_1, 2\pi R_2 n_2) = (2\pi R_1 n_2, 2\pi R_2 n_1)$$

と定める．[3] の結果を使うと，次の補題が証明できる．

**補題 1.** $F_t : \mathbb{R}^2 \to S^3$ を $F$ の等長的変形とする．各 $t$ について $F_t$ が $G$-不変ならば，任意の $v \in G$ に対して $F_t(x + \sigma(v)) = F_t(x)$ が成り立つ．

一方，代数的な考察により次のことが分かる．

**補題 2.** もし $G + \sigma(G) \neq G_0$ ならば，$G \subset W_+(n)$ または $G \subset W_-(n)$ を満たす整数 $n \geq 2$ が存在する．

補題 1 と例 1 により，$G + \sigma(G) = G_0$ ならば $F/G$ の等長的変形は自明なものに限ることが分かるので，$F/G$ が変形可能であれば $G + \sigma(G) \neq G_0$ である．従って，補題 2 から (2) $\Rightarrow$ (1) であることが分かる．

**注意 2.** $M$ を flat torus とし，$f : M \to S^3$ を等長はめ込みとする．$f$ が変形可能かどうかは，定理 3, 4 により判定できる．$f$ が変形可能である場合，定理 3, 4 の証明の中で構成される $f$ の等長的変形を $f_t : M \to S^3$ とし，$f_t$ の平均曲率を $H_t$ とすると

$$\int_M H_t dM = \int_M H_0 dM$$

である．

## References


1. L. Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometrica ellittica*, Ann. Mat. Pura Appl. **24** (1896), 93-129.
2. K. Enomoto, Y. Kitagawa and J. L. Weiner, *A rigidity theorem for the Clifford tori in $S^3$*, Proc. A.M.S. **124** (1996), 265-268.
3. Y. Kitagawa, *Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in $S^3$*, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 457-476.
4. Y. Kitagawa, *Rigidity of the Clifford tori in $S^3$*, Math. Z., **198** (1988), 591-599.
5. Y. Kitagawa, *Embedded flat tori in the unit 3-sphere*, J. Math. Soc. Japan, **47** (1995), 275-296.
6. Y. Kitagawa, *Isometric deformations of a flat torus in $S^3$ with nonconstant mean curvature*, preprint.
7. Y. Kitagawa, *Deformable flat tori in $S^3$ with constant mean curvature*, preprint.
8. U. Pinkall, *Hopf tori in $S^3$*, Invent. math., **81** (1985), 379-386.
9. S. Sasaki, *On complete surfaces with Gaussian curvature zero in 3-sphere*, Colloq. Math., **26** (1972), 165-174.
10. M. Spivak, *Some left-over problems from classical differential geometry*, Proc. Sympos. Pure Math., **27** (1975), 245-252.
11. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol.4, Publish or Perish, Berkeley, 1977.
12. S. T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature II*, Amer. J. Math., **97** (1975), 76-100.



321-8505 宇都宮市峰町 350 宇都宮大学教育学部数学教室

*E-mail address*: kitagawa@cc.utsunomiya-u.ac.jp