積分幾何学

講演・記録
田崎博之 (筑波大学数学系)
tasaki@math.tsukuba.ac.jp

Howard[9] の研究を中心にして、Riemann 等質空間における Poincaré の公式と kinematic formula およびそれらの応用の概略を解説する。

目 次

導入

3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$の等長変換全体の成す群を G で表す。$\mathbf{R}^3$内の二つのコンパクト曲面 M, Nをとる。ほとんどすべての $g \in G$ に対して $gM \cap N$は空集合または滑らかな曲線になる。そこで、ほとんどすべての $g \in G$ に対して $gM \cap N$の長さ $\mathrm{Vol}(gM \cap N)$ を対応させる関数を考えると、必ずしも G 全体では定義されないが、G 上の可測関数になる。ある普遍定数 Cが存在し、この可測関数を G 上で積分すると、

$$\int_G \mathrm{Vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = C\mathrm{Vol}(M)\mathrm{Vol}(N)$$

が成り立つ。これが $\mathbf{R}^3$内の二つの曲面に関する Poincaré の公式である。

Poincaré は 2 次元球面内の二つの曲線に対して、上と同様の公式を証明した。その後、多くの人々によってこの公式はその適用範囲を広げられ、現在では、一般の Riemann 等質

空間で成り立つ Poincaré の公式が得られている。この場合は、M, Nは Riemann 等質空間内の一般的な部分多様体である。この公式は Howard によって示されたものであり、第 1 節で解説する。

Poincaré の公式において、M, Nの位相的な条件 (ホモロジー類、ホモトピー類、可縮性等) から、$gM \cap N$が制約を受け、$\mathrm{Vol}(gM \cap N)$ がある不等式を満たすことがある。これと Poincaré の公式から、Mや Nの体積の不等式評価が得られる。その結果、ホモロジー類等での部分多様体の体積最小性を示すことが可能になる。これらの事柄を第 2 節で解説する。

$\mathbf{R}^3$内の二つの曲面 M, Nに話を戻す。先に共通部分 $gM \cap N$の長さを考えたが、曲線の幾何学的不変量は長さだけではなく、曲率の積分等を考えることができる。そこで、曲線の曲率等の積分を $I(gM \cap N)$ で表し、G 上の関数 $g \mapsto I(gM \cap N)$ の G 上の積分を M, N の第二基本形式に関する積分不変量で表すことを考える。これが kinematic formula である。一般の Riemann 等質空間における kinematic formula は Howard によって定式化され証明されている。第 3 節でこの kinematic formula の解説をする。

Howard の示した kinematic formula は必ずしも公式の具体的な記述が明確にわかるとは限らない。定曲率空間においては、具体的な記述が明確になっている kinematic formula がいくつか知られている。これらについて、第 4 節で解説する。Weyl の管状近傍の体積の公式に現れる部分多様体の第二基本形式に関する積分不変量を使った kinematic formula(Chern, Federer) についても解説する。

1 Poincaré の公式

内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間 Eの外積空間$\wedge^k E$の元 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$と $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ に対して

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \le i,j \le k}$$

とおくと、これは$\wedge^k E$上の内積を定める。この内積に関するノルムを $|\ |$ で表すことにする。

Eの n 次元部分ベクトル空間 Vと m 次元部分ベクトル空間 Wに対して、それぞれの正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$と $w_1, \ldots, w_m$をとり、

$$\sigma(V, W) = |v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_m|$$

とおく。上の定義は正規直交基底のとり方によらない。Vと Wがともに 1 次元のとき、Vと Wの間の角度をθとおくと、$\sigma(V, W) = \sin\theta$が成り立つ。一般に、$0 \le \sigma(V, W) \le 1$ が成り立つ。$\sigma(V, W) = 0$ となるための必要十分条件は、$V \cap W \ne \{0\}$ が成り立つことである。$\sigma(V, W) = 1$ となるための必要十分条件は、Vと Wが直交することである。

この講演では G を Lie 群とし、Kを G のコンパクト部分群とする。G の元 gは $xK \in G/K$ に gxKを対応させることで G/Kに作用し、G を等質空間 G/Kの Lie 変換群とみなす。G から G/Kへの自然な射影を$\pi : G \to G/K$で表す。$\pi(e)$ を G/Kの原点と呼び、o で表す。

G は左不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を持っていて、その計量は Kの元に関しては右不変にもなっているとする。Kはコンパクトなので、このような計量は必ず存在する。この G の計量は、G/K上の G 不変 Riemann 計量を誘導する。この G/K上の計量も $\langle\ ,\ \rangle$ で表す。こ

れらの計量に関して、$\pi : G \to G/K$は Riemann submersion になる。逆に、G/K上の G 不変計量は以上の方法で得られる。

G/Kの異なる点の接ベクトル空間の部分空間に対してσを定めるために、$T_x(G/K)$ の部分空間 Vと $T_y(G/K)$ の部分空間 Wに対して $g_x, g_y \in G$ を $g_x(o) = x, g_y(o) = y$を満たすようにとり、$\sigma(dg_x^{-1}V, dg_y^{-1}W)$ を考えると、これは g_x, g_yのとり方に依存する。そこで、Kの作用で平均化する。$x, y \in G/K$と $T_x(G/K)$ の部分空間 V、$T_y(G/K)$ の部分空間 Wをとる。G の元 g_x, g_yを $g_x(o) = x$ と $g_y(o) = y$を満たすようにとり、

$$\sigma_K(V, W) = \int_K \sigma(dg_x^{-1}V, dk^{-1}dg_y^{-1}W)d\mu_K(k)$$

によって$\sigma_K(V, W)$ を定義する。ただし、μ_Kは K上の Riemann 計量から定まる測度とする。このとき、$\sigma_K(V, W)$ は g_x, g_yのとり方に依存しない。さらに、任意の $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma_K(V, W) = \sigma_K(W, V) &= \sigma_K(dgV, W) = \sigma_K(V, dgW) \\ \sigma_K(V, \{0\}) &= \mathrm{Vol}(K). \end{aligned}$$

一つの等質空間の接ベクトル空間の部分空間の間のσ_Kの値と、他の等質空間の接ベクトル空間の部分空間の間の$\sigma_{K'}$の値との間の関係について述べておく。G'をもう一つの Lie 群とし、K'を G'のコンパクト部分群とする。$\dim G' = \dim G$ と $\dim K' = \dim K$を仮定する。G'は左不変 Riemann 計量 $\langle \, , \, \rangle'$を持ち、K'の右からの作用に関しても不変になっているとする。このとき、G'/K'は G'不変な Riemann 計量を持ち、それに関して G'から G'/K'への自然な射影は Riemann submersion になる。さらに、同型写像$\rho : K \to K'$と等長線形写像$\psi : T_o(G/K) \to T_{o'}(G'/K')$ が存在し、

$$\psi \circ dk = d(\rho(a)) \circ \psi \qquad (k \in K)$$

が成り立っていると仮定する。$x, y \in G/K$と部分空間 $V \subset T_x(G/K)$ と $W \subset T_y(G/K)$ が与えられているとし、$g_x(o) = x$ と $g_y(o) = y$を満たす $g_x, g_y \in G$ をとる。$x', y' \in G'/K'$と部分空間 $V' \subset T_{x'}(G'/K')$ と $W' \subset T_{y'}(G'/K')$ が与えられているとし、$g_{x'}(o') = x'$と $g_{y'}(o') = y'$を満たす $g_{x'}, g_{y'} \in G'$をとる。

$$\psi dg_x^{-1}V = dg_{x'}^{-1}V', \qquad \psi dg_y^{-1}W = dg_{y'}^{-1}W', \qquad \mathrm{Vol}(K) = \mathrm{Vol}(K')$$

と仮定すると、

$$\sigma_K(V, W) = \sigma_{K'}(V', W')$$

が成り立つ。以上の設定は、コンパクト型対称空間とそのノンコンパクト双対に対して成立する。

G のモジュラー関数Δは、

$$\Delta(g) = |\det(\mathrm{Ad}(g))| \qquad (g \in G)$$

で定義され、G から正の実数全体 $(0,\infty)$ の乗法群への準同型写像になっている。よって、$\Delta(K)$ は $(0,\infty)$ のコンパクト部分群になり、$\Delta(K)=\{1\}$ が成り立つ。$g,g_1\in G$ が$\pi(g)=\pi(g_1)$ を満たすと仮定すると、ある $k\in K$が存在し $g_1=gk$となる。したがって、

$$\Delta(g_1)=\Delta(gk)=\Delta(g)\Delta(k)=\Delta(g).$$

これより、次の定義が可能になる。$\Delta_K:G/K\to(0,\infty)$ を

$$\Delta_K(x)=\Delta(g)\qquad(x\in G/K, g\in G, \pi(g)=x)$$

で定義する。

Howard は次の Poincaré の公式の一般化を定式化し証明した。

定理 1.1 (Howard[8], [9]) Mと Nを G/Kのコンパクト部分多様体とし、$\dim M+\dim N\geq\dim(G/K)$ となっているとする。ほとんどすべての $g\in G$ に対して部分多様体 gMと Nがトランスバースに交わるとき、

$$\int_G \mathrm{Vol}(gM\cap N)d\mu_G(g)=\int_{M\times N}\sigma_K(T_x^\perp M,T_y^\perp N)\Delta_K(y)d\mu_{M\times N}(x,y)$$

が成り立つ。

(a) G が部分多様体 Mの接ベクトル空間全体に推移的に作用するならば (任意の $x,y\in M$ に対してある $g\in G$ が存在し $T_yM=dgT_xM$)、Mの任意の点 x_0に対して、

$$\int_G \mathrm{Vol}(gM\cap N)d\mu_G(g)=\mathrm{Vol}(M)\int_N\sigma_K(T_{x_0}^\perp M,T_y^\perp N)\Delta_K(y)d\mu_N(y)$$

が成り立つ。

(b) (a) の仮定にさらに G が部分多様体 Nの接ベクトル空間の全体にも推移的に作用することを付け加えると、Nの任意の点 y_0に対して、

$$\int_G \mathrm{Vol}(gM\cap N)d\mu_G(g)=\mathrm{Vol}(M)\sigma_K(T_{x_0}^\perp M,T_{y_0}^\perp N)\int_N\Delta_K(y)d\mu_N(y)$$

が成り立つ。

(c) (a) と (b) の仮定にさらに G がユニモジュラーであることを付け加えると、Mの任意の点 x_0と Nの任意の点 y_0に対して、

$$\int_G \mathrm{Vol}(gM\cap N)d\mu_G(g)=\mathrm{Vol}(M)\mathrm{Vol}(N)\sigma_K(T_{x_0}^\perp M,T_{y_0}^\perp N)$$

が成り立つ。

2 体積最小部分多様体

定理 2.1 (Berger[2], Fomenko[6]) $P^n(\mathbf{R})$ 内に全測地的に埋め込まれた $P^k(\mathbf{R})$ は、$P^n(\mathbf{R})$ の $\mathbf{Z}_2$係数のホモロジー群 $H_k(P^n(\mathbf{R});\mathbf{Z}_2)\cong\mathbf{Z}_2$の生成元を代表し、その中で体積最小部分多様体になる。

証明　$P^k(\mathbf{R})$ と $P^{n-k}(\mathbf{R})$ は、一般的な位置にすると

$$\#(P^k(\mathbf{R}) \cap P^{n-k}(\mathbf{R})) = 1$$

となる。$P^k(\mathbf{R})$ のホモロジー類に含まれる部分多様体 Nをとると、ほとんどすべての $g \in SO(n+1)$ に対して

$$\#(gP^{n-k}(\mathbf{R}) \cap N) \equiv 1 \pmod{2}$$

となるので、$\#(gP^{n-k}(\mathbf{R}) \cap N) \geq 1$ が成り立つ。

実射影空間に対する Poincaré の公式は

$$\begin{aligned} & \int_{SO(n+1)} \#(gM \cap N) d\mu_{SO(n+1)}(g) \\ = \ & \frac{\mathrm{Vol}(SO(n+1))}{\mathrm{Vol}(P^k(\mathbf{R}))\mathrm{Vol}(P^{n-k}(\mathbf{R}))} \mathrm{Vol}(M)\mathrm{Vol}(N) \end{aligned}$$

という形になる。一般に定曲率空間形の等長変換群はユニモジュラーになり、一点のイソトロピー部分群は、その点の接ベクトル空間の次元を定めた部分ベクトル空間全体に推移的に作用するので、任意の部分多様体に対して定理 1.1(c) の仮定が成り立つ。そこで、この公式を $M = P^{n-k}(\mathbf{R})$ とおいて使うと

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(SO(n+1)) & \leq \int_{SO(n+1)} \#(gP^{n-k}(\mathbf{R}) \cap N) d\mu_{SO(n+1)}(g) \\ & = \frac{\mathrm{Vol}(SO(n+1))}{\mathrm{Vol}(P^k(\mathbf{R}))\mathrm{Vol}(P^{n-k}(\mathbf{R}))} \mathrm{Vol}(P^{n-k}(\mathbf{R}))\mathrm{Vol}(N). \end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{Vol}(P^k(\mathbf{R})) \leq \mathrm{Vol}(N)$$

となり、$P^k(\mathbf{R})$ は体積最小になる。

Liu[12] は上の定理を使って、次に定義する回転群 $SO(n)$ 内の Pontrjagin サイクルの体積最小性を示した。

定義 2.2 $(n-1)$ 次元実射影空間 $P^{n-1}(\mathbf{R})$ の元 Vを $\mathbf{R}^n$内の 1 次元部分ベクトル空間とみなし、$\mathbf{R}^n$での Vの直交補空間 $V^\perp$に関する鏡映をρ_Vで表す。$V_0 \in P^{n-1}(\mathbf{R})$ を一つ固定すると、

$$P^{n-1}(\mathbf{R}) \to SO(n)\ ;\ V \mapsto \rho_{V_0}\rho_V$$

は全測地的埋め込みになる。この埋め込みの像を P^{n-1}で表す。各 $k < n$ について $SO(k+1)$ は自然に $SO(n)$ に全測地的に埋め込まれるので、P^kも $SO(n)$ に全測地的に埋め込まれる。これら $P^1, \ldots, P^{n-1}$を $SO(n)$ の **Pontrjagin サイクル**と呼ぶ。Pontrjagin サイクルは $SO(n)$ の $\mathbf{Z}_2$係数のホモロジー類を代表することが知られている。

定理 2.3 (Liu[12]) $SO(n)$ 内で Pontrjagin サイクル $P^1, \ldots, P^{n-1}$は $\mathbf{Z}_2$係数ホモロジー類内で体積最小になる。

証明の概略　Clliford 代数の表現を使うと、等長埋め込み$\iota : Spin(n) \to S^N$を構成することができ、ιは等長埋め込み$\bar{\iota} : SO(n) \to P^N(\mathbf{R})$ を誘導する。さらにこの等長埋め込み$\bar{\iota}$によって $SO(n)$ の Pontrjagin サイクル P^kは $P^N(\mathbf{R})$ の全測地的部分多様体に写る。よって、定理 2.1より、$\bar{\iota}(P^k)$ は $P^N(\mathbf{R})$ の $\mathbf{Z}_2$係数ホモロジー類内で体積最小になる。したがって、P^kは $SO(n)$ の $\mathbf{Z}_2$係数ホモロジー類内でも体積最小になる。

定理 2.4 (Lê[11]) $\mathbf{K}$ を $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ のうちのいずれかとし、それぞれの場合、$d = 1, 2, 4$ とおく。さらに、

$$O(n, \mathbf{K}) = \begin{cases} SO(n) & (\mathbf{K} = \mathbf{R}) \\ SU(n) & (\mathbf{K} = \mathbf{C}) \\ Sp(n) & (\mathbf{K} = \mathbf{H}) \end{cases}$$

としておく。このとき、$\mathbf{K}^{r+n}$の r次元 $\mathbf{K}$ 部分ベクトル空間全体の成す Grassmann 多様体 $G_r(\mathbf{K}^{r+n})$ 内の実 drs 次元部分多様体 Nに対して

$$\begin{aligned} & \int_{O(r+n,\mathbf{K})} \#(gG_r(\mathbf{K}^{r+n-s}) \cap N) d\mu_{O(r+n,\mathbf{K})}(g) \\ \leq \quad & \frac{\mathrm{Vol}(O(r+n,\mathbf{K}))}{\mathrm{Vol}(G_r(\mathbf{K}^{r+s}))} \mathrm{Vol}(N) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に、$G_r(\mathbf{K}^{r+s})$ が代表する $H_{drs}(G_r(\mathbf{K}^{r+n}); \mathbf{Z}_2)$ の元の中で $G_r(\mathbf{K}^{r+s})$ は体積最小になる。

この定理も Poincaré の定理を使って証明される。

Riemann 多様体 Mの一点 p を出る測地線は最初は端点を結ぶ最短測地線になっているが、途中で最短性が成り立たない点がでてくる可能性がある。最初に最短性が成り立たなくなる点を最小点と呼び、p から出るすべての測地線の最小点をすべて集めたものを、最小軌跡と呼び $C_p(M)$ で表す。$M - C_p(M)$ は多様体と同じ次元の開円板になることがわかる (Kobayashi[10])。

定理 2.5 (Helgason[7]) Mを実射影空間以外のコンパクト既約対称空間とし、κを Mの断面曲率の最大値とする。このとき一定断面曲率κを持つ全測地的球面が存在する。さらに同じ次元のそのような二つの球面は、Mの等長変換全体の単位連結成分の作用で写り合う。

定義 2.6 定理 2.5で述べた球面で最大次元のものを Mの **Helgason 球面**と呼ぶ。

定理 2.7 (T.[13], [14]) コンパクト既約対称空間 G/Kの Helgason 球面を Sで表す。G/K は次の内のいずれか一つと仮定する。

(1) 単連結射影空間

(2) Hermite 対称空間

(3) 四元数 Grassmann 多様体

このとき、$\dim N = \dim S$を満たす部分多様体 Nに対して

$$\frac{\mathrm{Vol}(S)}{\mathrm{Vol}(G)}\int_G \#(gC_o(G/K)\cap N)d\mu_G(g) \leq \mathrm{Vol}(N)$$

が成り立ち、$N = S$のとき、等号が成り立つ。さらに、Nが一点に可縮でない部分多様体のとき、

$$\mathrm{Vol}(S) \leq \frac{\mathrm{Vol}(S)}{\mathrm{Vol}(G)}\int_G \#(gC_o(G/K)\cap N)d\mu_G(g) \leq \mathrm{Vol}(N)$$

が成り立ち、Sは一点に可縮でない部分多様体の中で体積最小になる。

3 Kinematic formulas

V_0を $T_o(G/K)$ の p 次元部分空間とする。G/Kの p 次元部分多様体 Mに対して、任意の $x \in M$についてある $g \in G$ が存在し、$dgV_0 = T_xM$が成り立つとき、Mを V_0型と呼ぶことにする。

G/Kが実定曲率空間形の場合は、任意の $\dim V_0$次元部分多様体が V_0型になる。G/Kが複素定曲率空間形 (複素射影空間等) の場合は、V_0が複素 r次元複素部分ベクトル空間のとき、任意の複素 r次元複素部分多様体が V_0型になる。

Mを Riemann 多様体 Sの部分多様体とする。∇^Sで Sの Riemann 接続を表し、∇^Mで Mの Riemann 接続を表すと、M上のベクトル場 Xと Yに対して

$$\nabla^S_X Y = \nabla^M_X Y + h(X, Y)$$

となる。ここで、$\nabla^M_X Y$は $\nabla^S_X Y$の TMに関する接成分であり、$h(X, Y)$ は $\nabla^S_X Y$の TMに関する法成分である。各 $x \in M$に対して h_xは $T_xM \times T_xM$から $T_x^\perp M$への対称双線形写像になる。h が Mの第二基本形式である。

V_0を $T_o(G/K)$ の部分空間とし、$\mathrm{II}(V_0)$ を

$$\mathrm{II}(V_0) = \{h \mid h : V_0 \times V_0 \to V_0^\perp \text{は対称双線形写像}\}$$

で定義する。

$\mathrm{II}(V_0)$ の元は、o を通り o での接ベクトル空間が V_0になる、G/Kの部分多様体の第二基本形式と想定される。

$K(V_0)$ を K内の V_0の安定化群とする。すなわち、

$$K(V_0) = \{k \in K \mid dkV_0 = V_0\}.$$

安定化群 $K(V_0)$ は次のように $\mathrm{II}(V_0)$ に自然に作用する。$k \in K(V_0)$ と $h \in \mathrm{II}(V_0)$ に対して

$$(kh)(u, v) = dkh(dk^{-1}u, dk^{-1}v) \qquad (u, v \in V_0).$$

$\mathrm{II}(V_0)$ はベクトル空間になっているので、$\mathrm{II}(V_0)$ 上の多項式を考えることができる。$\mathcal{P}$ を $\mathrm{II}(V_0)$ 上の多項式とする。任意の $k \in K(V_0)$ と $h \in \mathrm{II}(V_0)$ に対して $\mathcal{P}(kh) = \mathcal{P}(h)$ が成り立つとき、$\mathcal{P}$ は $K(V_0)$ の作用に関して不変であるといわれる。

V_0を$T_o(G/K)$のp次元部分空間とし、MをG/K内のV_0型の部分多様体とする。各$x\in M$に対してある$g\in G$が存在し、$dgV_0=T_xM$となる。よって$g^{-1}M$はoを通り、oでの接ベクトル空間がV_0に一致するG/Kの部分多様体になる。したがって、$h^{g^{-1}M}\in \mathrm{II}(V_0)$となる。$g_1\in G$を$dg_1V_0=T_xM$を満たすもう一つの元とする。$dg^{-1}dg_1V_0=V_0$となるので、ある$k\in K(V_0)$が存在し、$g^{-1}g_1=k$。よって$g_1=gk$となる。$g_1^{-1}=k^{-1}g^{-1}$となり、$g_1^{-1}M=k^{-1}g^{-1}M$が成り立つ。$u,v\in V_0=T_o(g^{-1}M)$とすると、$dk^{-1}u,dk^{-1}v\in dk^{-1}V_0=V_0=T_o(g_1^{-1}M)$であり、$k$は等長変換だから、

$$h_o^{g^{-1}M}(u,v)=dkh_o^{g_1^{-1}M}(dk^{-1}u,dk^{-1}v)=(kh_o^{g_1^{-1}M})(u,v).$$

これより、$h_o^{g^{-1}M}=kh_o^{g_1^{-1}M}$が成り立つ。そこで、$\mathcal{P}$を$K(V_0)$に関して不変な$\mathrm{II}(V_0)$上の多項式とすると、

$$\mathcal{P}(h_o^{g^{-1}M})=\mathcal{P}(kh_o^{g_1^{-1}M})=\mathcal{P}(h_o^{g_1^{-1}M})$$

を得る。$x\in M$に対して

$$\mathcal{P}(h_x^M)=\mathcal{P}(h_o^{g^{-1}M})$$

によって$\mathcal{P}(h_x^M)$を定義する。ここで、$g\in G$は$dgV_0=T_xM$を満たす元としている。$\mathcal{P}(h_x^M)$の定義が、このgのとり方に依存しないことは、上で示したことからわかる。さらに$g'\in G$をとると、$dgV_0=T_xM$だから、

$$d(g'g)V_0=dg'(T_xM)=T_x(g'M)$$

となり、$g'M$もV_0型の部分多様体になり、

$$\mathcal{P}(h_{g'x}^{g'M})=\mathcal{P}(h_o^{(g'g)^{-1}g'M})=\mathcal{P}(h_o^{g^{-1}(g')^{-1}g'M})=\mathcal{P}(h_o^{g^{-1}M})=\mathcal{P}(h_x^M).$$

したがって、任意の$g'\in G$に対して

$$\mathcal{P}(h_{g'x}^{g'M})=\mathcal{P}(h_x^M).$$

V_0を$T_o(G/K)$の部分空間とし、$\mathcal{P}$を$K(V_0)$に関して不変な$\mathrm{II}(V_0)$上の多項式とする。G/K内のV_0型のコンパクト部分多様体Mに対して

$$I^{\mathcal{P}}(M)=\int_M \mathcal{P}(h_x^M)d\mu_M(x)$$

によって、積分不変量$I^{\mathcal{P}}(M)$を定義する。

(1) $g\in G$はG/Kの等長変換だから、

$$I^{\mathcal{P}}(M)=\int_M \mathcal{P}(h_x^M)d\mu_M(x)=\int_{gM}\mathcal{P}(h_{gx}^{gM})d\mu_{gM}(gx)=I^{\mathcal{P}}(gM).$$

したがって、$g\in G$に対して、

$$I^{\mathcal{P}}(gM)=I^{\mathcal{P}}(M)$$

が成り立ち、$I^{\mathcal{P}}$はGの作用に関して不変になる。

(2) $I^{\mathcal{P}} = 1$ とすると、$I^{\mathcal{P}}(M) = \mathrm{Vol}(M)$ となり、通常の体積は上で定義した積分不変量の一つになる。

Mを Riemann 多様体 Sの部分多様体とする。$x \in M$に対して $P : T_xS \to T_xM$を直交射影とする。S内の Mの x における拡張された第二基本形式 H_x^Mを

$$H_x^M(u, v) = h_x^M(Pu, Pv) \qquad (u, v \in T_xS)$$

で定義する。

拡張された第二基本形式の定義にあわせて、$\mathrm{II}(V_0)$ も次のように拡張する。

$$\begin{aligned} & \mathrm{EII}(T_o(G/K)) \\ = \; & \{H \mid H : T_o(G/K) \times T_o(G/K) \to T_o(G/K) \text{ は対称双線形写像 }\} \end{aligned}$$

Kは次のように $\mathrm{EII}(T_o(G/K))$ に自然に作用する。$k \in K$と $H \in \mathrm{EII}(T_o(G/K))$ に対して

$$(kH)(u, v) = dkH(dk^{-1}u, dk^{-1}v) \qquad (u, v \in T_o(G/K)).$$

Mを G/Kの部分多様体とし、x を Mの点とする。$go = x$ を満たす $g_x \in G$ をとると、$H_o^{g^{-1}M} \in \mathrm{EII}(T_o(G/K))$ となる。$g_1o = x$ を満たすもう一つの元 $g_1 \in G$ をとる。$g^{-1}g_1o = o$ となるので、ある $k \in K$が存在し、$g^{-1}g_1 = k$。よって $g_1 = gk$となる。$g_1^{-1} = k^{-1}g^{-1}$となり、$g_1^{-1}M = k^{-1}g^{-1}M$が成り立つ。

$$P : T_o(G/K) \to T_o(g^{-1}M)$$

を直交射影とすると、

$$dk^{-1}Pdk : T_o(G/K) \to T_o(g_1^{-1}M)$$

も直交射影になる。$u, v \in V_0 = T_o(G/K)$ とすると、kは等長変換だから、

$$\begin{aligned} H_o^{g^{-1}M}(u, v) &= h_o^{g^{-1}M}(Pu, Pv) \\ &= dkh_o^{g_1^{-1}M}(dk^{-1}Pu, dk^{-1}Pv) \\ &= dkh_o^{g_1^{-1}M}((dk^{-1}Pdk)dk^{-1}u, (dk^{-1}Pdk)dk^{-1}v) \\ &= dkH_o^{g_1^{-1}M}(dk^{-1}u, dk^{-1}v) \\ &= (kH_o^{g_1^{-1}M})(u, v). \end{aligned}$$

これより、$H_o^{g^{-1}M} = kH_o^{g_1^{-1}M}$が成り立つ。$\mathcal{P}$ を Kの作用で不変な $\mathrm{EII}(T_o(G/K))$ 上の多項式とすると、

$$\mathcal{P}(H_o^{g^{-1}M}) = \mathcal{P}(kH_o^{g_1^{-1}M}) = \mathcal{P}(H_o^{g_1^{-1}M})$$

を得る。$x \in M$に対して

$$\mathcal{P}(H_x^M) = \mathcal{P}(H_o^{g^{-1}M})$$

によって $\mathcal{P}(H_x^M)$ を定義する。ここで、$g \in G$ は $go = x$ を満たす元としている。$\mathcal{P}(H_x^M)$ の定義が、この gのとり方に依存しないことは、上で示したことからわかる。さらに $g' \in G$ をとると、$go = x$ だから、$(g'g)o = g'x$ となり、

$$\mathcal{P}(H_{g'x}^{g'M}) = \mathcal{P}(H_o^{(g'g)^{-1}g'M}) = \mathcal{P}(H_o^{g^{-1}(g')^{-1}g'M}) = \mathcal{P}(H_o^{g^{-1}M}) = \mathcal{P}(H_x^M).$$

したがって、任意の $g' \in G$ に対して

$$\mathcal{P}(H_{g'x}^{g'M}) = \mathcal{P}(H_x^M).$$

そこで、Mの不変積分量 $I^{\mathcal{P}}(M)$ を

$$I^{\mathcal{P}}(M) = \int_M \mathcal{P}(H_x^M) d\mu_M(x)$$

で定義する。$g \in G$ は G/Kの等長変換だから、上で示したことより、

$$I^{\mathcal{P}}(M) = \int_M \mathcal{P}(H_x^M) d\mu_M(x) = \int_{gM} \mathcal{P}(H_{gx}^{gM}) d\mu_{gM}(gx) = I^{\mathcal{P}}(gM).$$

したがって、$g \in G$ に対して、

$$I^{\mathcal{P}}(gM) = I^{\mathcal{P}}(M)$$

が成り立ち、$I^{\mathcal{P}}$は G の作用に関して不変になる。

Howard はそれまでに知られていた kinematic formula を一般化し、次の定理を証明した。

定理 3.1 (Howard[9]) G はユニモジュラーであると仮定する。$T_o(G/K)$ の部分空間 V_0と W_0を、$\dim V_0 + \dim W_0 \geq \dim(G/K)$ を満たすようにとり、$\mathrm{EII}(T_o(G/K))$ 上の多項式 $\mathcal{P}$ を次の条件を満たすものとする。

(a) $\mathcal{P}$ は次数 lの同次多項式で、Kに関して不変、

(b)

$$\int_K \sigma(V_0^{\perp}, dk^{-1}W_0^{\perp})^{1-l} d\mu_K(k) < \infty.$$

このとき、ある多項式の組の有限集合 $\{(\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$が存在し、次の条件を満たす。

(1) 各 $\mathcal{Q}_\alpha$は $\mathrm{II}(V_0)$ 上の $K(V_0)$ 不変同次多項式、

(2) 各 $\mathcal{R}_\alpha$は $\mathrm{II}(W_0)$ 上の $K(W_0)$ 不変同次多項式、

(3) 各αについて $\mathrm{deg}\mathcal{Q}_\alpha + \mathrm{deg}\mathcal{R}_\alpha = l$ が成り立つ、

(4) G/K内の V_0型のコンパクト部分多様体 Mと W_0型のコンパクト部分多様体 Nに対して、次の kinematic formula が成り立つ。

$$\int_G I^{\mathcal{P}}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \sum_\alpha I^{\mathcal{Q}_\alpha}(M) I^{\mathcal{R}_\alpha}(N).$$

4 定曲率空間内の kinematic formulas

この節では G/Kを定曲率 c を持つ単連結 n 次元 Riemann 多様体とする。G は G/Kの等長変換全体の成す群とする。$O(T_o(G/K))$ を内積空間 $T_o(G/K)$ の直交群とする。このとき、$a \mapsto a_*$は Kから $O(T_o(G/K))$ への同型写像になる。そこで、この同型写像をとおして、Kと $O(T_o(G/K))$ を同一視する。$\mathrm{Vol}(K) = \mathrm{Vol}(O(n)) = 2\mathrm{Vol}(SO(n))$ となる。$T_o(G/K)$ の p 次元部分空間の全体に Kは推移的に作用するので、V_0を $T_o(G/K)$ の p 次元部分空間とすると、G/Kの任意の p 次元部分多様体は V_0型になる。さらに、

$$K(V_0) = O(V_0) \times O(V_0^{\perp})$$

となる。ここで、$O(V_0)$ と $O(V_0^\perp)$ は、それぞれ V_0と $V_0^\perp$の直交群である。

定曲率空間 G/Kにおいて、kinematic formula は次のように述べ直すことができる。

定理 4.1 (Howard[9]) V_0を $T_o(G/K)$ の p 次元部分空間とし、W_0を $T_o(G/K)$ の q次元部分空間とする。$\mathcal{P}$ を $\mathrm{EII}(T_o(G/K))$ 上の次数 lの K不変同次多項式とし、

$$l \leq p+q-n+1$$

と仮定する。このとき、ある多項式の組みの有限集合 $\{(\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$が存在し、次の条件を満たす。

(1) 各 $\mathcal{Q}_\alpha$は $\mathrm{II}(V_0)$ 上の $O(V_0)\times O(V_0^\perp)$ 不変同次多項式、

(2) 各 $\mathcal{R}_\alpha$は $\mathrm{II}(W_0)$ 上の $O(W_0)\times O(W_0^\perp)$ 不変同次多項式、

(3) 各αについて $\mathrm{deg}\mathcal{Q}_\alpha + \mathrm{deg}\mathcal{R}_\alpha = l$が成り立つ、

(4) G/K内の p 次元コンパクト部分多様体 Mと q次元コンパクト部分多様体 Nに対して、次の kinematic formula が成り立つ。

$$\int_G I^{\mathcal{P}}(gM\cap N)d\mu_G(g) = \sum_\alpha I^{\mathcal{Q}_\alpha}(M)I^{\mathcal{R}_\alpha}(N).$$

直交群の不変式の理論はよく理解されているので、与えられた次数 kに対して、$\mathrm{II}(V_0)$ 上の次数 kの $O(V_0)\times O(V_0^\perp)$ 不変同次多項式の基底を列挙することができる。

たとえば、次の結果が知られている。

定理 4.2 (Chen[3]) $\mathbf{R}^3$内の曲面の主曲率をλ_1, λ_2として、

$$|h|^2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2, \qquad H^2 = \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^2$$

とおく。また $\mathbf{R}^3$内の曲線の曲率をκで表すことにする。G で $\mathbf{R}^3$の等長変換群を表す。このとき、$\mathbf{R}^3$内のコンパクト曲面 M, Nに対して、

$$\begin{aligned}&\int_G\int_{gM\cap N}\kappa^2 ds d\mu_G(g)\\ =\;& \pi^3\mathrm{Vol}(M)\int_N(2H^2+|h|^2)d\mu_N + \pi^3\mathrm{Vol}(N)\int_M(2H^2+|h|^2)d\mu_M\end{aligned}$$

が成り立つ。

Weyl の管状近傍の体積に関する公式と Chern-Federer の kinematic formula を述べるために、若干の準備をしておく。

$\mathbf{R}^n$内の p 次元部分ベクトル空間 V_0をとる。$h\in\mathrm{II}(V_0)$ の正規直交基底による成分を h_{ij}^αで表すことにする。

$$w_{2l}(h) = 2^l \sum_{\substack{1\leq i_1,\dots,i_{2l}\leq p\\ p+1\leq\alpha_1,\dots,\alpha_l\leq n}} \det\begin{bmatrix} h_{i_1i_1}^{\alpha_1} & h_{i_1i_2}^{\alpha_1} & \cdots & h_{i_1i_{2l}}^{\alpha_1}\\ h_{i_2i_1}^{\alpha_1} & h_{i_2i_2}^{\alpha_1} & \cdots & h_{i_2i_{2l}}^{\alpha_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{i_{2l-1}i_1}^{\alpha_l} & h_{i_{2l-1}i_2}^{\alpha_l} & \cdots & h_{i_{2l-1}i_{2l}}^{\alpha_l}\\ h_{i_{2l}i_1}^{\alpha_l} & h_{i_{2l}i_2}^{\alpha_l} & \cdots & h_{i_{2l}i_{2l}}^{\alpha_l}\end{bmatrix}$$

によって、$\mathrm{II}(V_0)$ 上の $2l$次同次多項式 w_{2l}を定義する。ただし、上の行列式の (a,b) 成分は、$h^{\alpha_{[(a+1)/2]}}_{i_a i_b}$である。$w_{2l}$は $O(V_0)\times O(V_0^{\perp})$ 不変になる。

$H\in \mathrm{EII}(\mathbf{R}^n)$ に対しても同様に、

$$
w_{2l}(H)=2^l\sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_{2l}\le n\\ 1\le \alpha_1,\dots,\alpha_l\le n}}\det\begin{bmatrix} H^{\alpha_1}_{i_1i_1} & H^{\alpha_1}_{i_1i_2} & \cdots & H^{\alpha_1}_{i_1i_{2l}}\\ H^{\alpha_1}_{i_2i_1} & H^{\alpha_1}_{i_2i_2} & \cdots & H^{\alpha_1}_{i_2i_{2l}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ H^{\alpha_l}_{i_{2l-1}i_1} & H^{\alpha_l}_{i_{2l-1}i_2} & \cdots & H^{\alpha_l}_{i_{2l-1}i_{2l}}\\ H^{\alpha_l}_{i_{2l}i_1} & H^{\alpha_l}_{i_{2l}i_2} & \cdots & H^{\alpha_l}_{i_{2l}i_{2l}} \end{bmatrix}
$$

によって、$\mathrm{EII}(\mathbf{R}^n)$ 上の $2l$次同次多項式 w_{2l}を定義する。ただし、上の行列式の (a,b) 成分は、$H^{\alpha_{[(a+1)/2]}}_{i_a i_b}$である。$w_{2l}$は $O(n)\times O(n)$ 不変になる。

定理 4.3 (Weyl[15]) Mを $\mathbf{R}^n$内のコンパクト部分多様体とする。$r>0$ に対して

$$
\tau_r M=\{x\in\mathbf{R}^n \mid d(x,M)\le r\}
$$

によって$\tau_r M$を定める。このとき、n,p,lだけに依存する定数$\gamma(n,p,l)$ が存在し、十分小さい rに対して

$$
\mathrm{Vol}(\tau_r M)=\sum_{0\le 2l\le p}\gamma(n,p,l)I^{w_{2l}}(M)r^{n-p+2l}
$$

が成り立つ。

Gauss の方程式を使うと、$w_{2l}(h^M)$ は Mの曲率テンソルの同次多項式として表され、特に、$\mathbf{R}^n$への埋め込み方に依存しない内在的な量であることがわかる。さらに、コンパクトで向きの付いた Riemann 多様体 Mの次元が偶数 $2l$のときは、$I^{w_{2l}}(M)$ は Mの Euler 数 $\chi(M)$ に比例する。すなわち、ある普遍定数 Cが存在し、

$$
I^{w_{2l}}(M)=C\chi(M)
$$

が成り立つことが Allendoerfer-Weil[1] によって示され、特性類の理論に発展していった。

定理 4.4 (Chern[4], Federer[5]) G/Kを定曲率空間形とする。このとき、n,p,q,k,lだけに依存する定数 $C(n,p,q,k,l)$ が存在し、G/K内の p 次元コンパクト部分多様体 M、q次元コンパクト部分多様体 Nと $0\le 2l\le p+q-n$ に対して

$$
\int_G I^{w_{2l}}(gM\cap N)d\mu_G(g)=\sum_{0\le k\le l}C(n,p,q,k,l)I^{w_{2k}}(M)I^{w_{2(l-k)}}(N)
$$

が成り立つ。

参考文献

[1] C. B. Allendoerfer and A. Weil, The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 10 – 120.

[2] M. Berger, Du côté de chez Pu, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **5** (1972), 1 – 44.

[3] C.-S. Chen, On the kinematic formula of square of mean curvature, Indiana Univ. Math. J., **22** (1972 – 1973), 1163 – 1169.

[4] S. S. Chern, On the kinematic formula in integral geometry, J. Math. Mech., **16** (1966), 101 – 118.

[5] H. Federer, Curvature measures, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1959), 418 – 491.

[6] A. T. Fomenko, Minimal compacta in Riemannian manifolds and Reifenberg's conjecture, Math. USSR Izvest., **6** (1972), 1037 – 1066.

[7] S. Helgason, Totally geodesic spheres in compact symmetric spaces, Math. Ann., **165** (1966), 309 – 317.

[8] R. Howard, Classical integral geometry in Riemannian homogeneous spaces, Contemporary Math., **63** (1987), 179 – 204.

[9] R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, Memoirs A.M.S., No.509, 1993

[10] S. Kobayashi, On conjugate and cut loci, in Studies in global geometry and analysis, (S. S. Chern, ed.), MAA 1967, 96 – 122.

[11] Lê Hông Vân, Application of integral geometry to minimal surfaces, Int. J. Math., **4** (1993), 89 – 111.

[12] X. Liu, Volume minimizing cycles in compact Lie groups, Amer. J. Math., **117** (1995), 1203 – 1248.

[13] 田崎博之, 積分幾何学, 上智大学数学講究録 No.37, 1994.

[14] H. Tasaki, Integral geometry under cut loci in compact symmetric spaces, Nagoya Math. J., **137** (1995), 33 – 53.

[15] H. Weyl, On the volume of tubes, Amer. J. Math., **61** (1939), 461 – 472.