Real hypersurfaces in complex space form in terms of Ricci $*$-tensor

濱田 龍義（福岡大学理学部応用数学科）

1999 年 11 月 17 日

1　序

我々はこれまで複素空間型内の実超曲面について研究をすすめてきました。

定数 $c \neq 0$ を正則断面曲率に持つ複素空間型を $M_n(c)$ と書くことにします。その実超曲面 M に対する単位法ベクトル場を N として、そのとき、複素空間型の Kähler structure から実超曲面に almost contact structure (ξ, ϕ, η, g) が得られます。almost contact structure とは

$$\eta(\xi) = 1$$

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$$

を満たす実超曲面の接空間上の $(1,1)$-tensor を ϕ、1 次微分形式 η、単位接ベクトル場 ξ から構成されます。これらは任意の $X, Y \in TM$ に対して

$$\phi\xi = 0$$

$$\eta(\phi X) = 0$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

を満たすことが知られています。

また、ξ は構造ベクトル場と呼ばれており、複素空間型内の実超曲面を論ずる上で重要な役割を果たしています。

正則断面曲率が正の場合、すなわち複素射影空間内の実超曲面の典型的な例としては、R. Takagi による等質実超曲面に関する研究成果が良く知られています。正則断面曲率が負の場合、複素双曲空間内の等質実超曲面については J. Berndt によって研究が進んでいます。

われわれは複素空間型の実超曲面の Ricci テンソル に注目して、研究をすすめてきました。まずはこれまでの知られている事実について述べたいと思います。

複素射影空間は Einstein な実超曲面を許容しないことが知られています。これは、T. E. Cecil & P. J. Ryan によって示されました。実超曲面を M とし、Ricci テンソル を S とすると、任意の接ベクトル場 X にたいして関数 a, b が存在して

$$SX = aX + b\eta(X)\xi$$

を満たす場合に M は pseudo-Einstein であると言います。彼らはこのような pseudo-Einstein 実超曲面の分類を与えています。

命題 1 ここでは、複素射影空間の正則断面曲率を 4 と仮定します。複素射影空間 $P_nC, n \geq 3$ 内の実超曲面 M が、*pseudo-Einstein* であるならば、その係数 *a, b* は定数であり、M は次のものに局所的に合同です。

- (A_1) 半径 r の測地球、 $0 < r < \frac{\pi}{2}$
- (A_2) $P_k(C)$ 上の半径 r の *tube*、$1 \leq k \leq n-2$, $0 < r < \frac{\pi}{2}$、ただし、その半径は $cot^2 r = k/(n-k-1)$ をみたす。
- (B) Q^{n-1} 上の半径 r の *tube*、$0 < r < \frac{\pi}{4}$、ただし、その半径は $cot^2 r = n-2$ をみたす。

一方、複素双曲空間内の場合には、M. Kon と S. Montiel の研究により、次の結果が示されています。

命題 2 ここでは、複素双曲空間の正則断面曲率を -4 と仮定します。複素双曲空間 $H_nC, n \geq 3$ 内の実超曲面 M が、*pseudo-Einstein* であるならば、その係数 *a, b* は定数であり、M は次のものに局所的に合同です。

- (A_1) 半径 r の測地球、$r > 0$、
- (A_2) $H_k(C)$ 上の半径 r の *tube*、$1 \leq k \leq n-2$, $r > 0$、
- (N) *horosphere*

また、 U-Hang Ki が 次のことを示しました。

命題 3 *Ricci* テンソル が平行であるような実超曲面は存在しないことを示しました。

S. Tachibana は almost Hermitian manifold に対して、Ricci $*$-tensor という概念を導入した。われわれはこの概念を almost contact manifold に対して導入し、その一例として複素空間型内の実超曲面について考えたいと思います。

まず複素空間型内の実超曲面上に almost contact structure を用いて、次のように Ricci $*$-tensor を定義します。

$$S^*(X,Y) = \frac{1}{2} \textit{trace of } (Z \mapsto R(X,\phi Y)\phi Z)$$

for $X, Y, Z \in TM$

　このとき、任意の $X, Y \in TM$ に対して

$$S^*(\phi X, \phi Y) = S^*(Y, X) - \eta(Y) S^*(\xi, X)$$

　であることが簡単に得られます。

　構造ベクトル場 ξ に直交する接分布を $T_0 M$ と置くとこの接分布は almost contact structure ϕ によって不変です。この接分布上での Ricci $*$-tensor に注目して次のような定義を与えます。

1.1 定義

　任意の $X, Y \in T_0 M$ に対して

$$S^*(X, Y) = \alpha^* g(X, Y)$$

が成立するような M 上の関数 α^* が存在するとき、M を weakly $*$-Einstein と言い、さらに、α^* が定数の時 M を $*$-Einstein と言うことにします。

2 主定理

定理 1 複素空間型内において *$*$-Einstein* かつ、構造ベクトル場が主曲率方向の実超曲面は次のものに局所的に合同である。

- 複素射影空間 $P_n(C)$、すなわち正則断面曲率が正の場合
  - (A_1) 半径 r の測地球、 $0 < r < \frac{\pi}{2}$
  - (B) 半径 r の Q^{n-1} 上の *tube*、 $0 < r < \frac{\pi}{4}$
- 複素双曲空間 $H_n(C)$、すなわち正則断面曲率が負の場合
  - (A_1) 半径 r の測地球、および $H_{n-1}(C)$ 上の *tube*、$r > 0$、
  - (B) 半径 r の $H^n(R)$ 上の *tube*、 $r > 0$
  - (N) *a horosphere*

　上の定理における複素空間型内の実超曲面はすべて等質実超曲面ですが、$*$-Einstein な非等質実超曲面が存在することがわかっています。例えば、複素空間型内の ruled 実超曲面が、$*$-Einstein であることが、わかりますが、これは構造ベクトル場が主曲率方向でないことが知られています。

参考文献

[1] Berndt, J. *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex space forms*, Geometry & Topology of Submanifolds, II 1988 10–19

[2] Berndt, J. *Homogeneous hypersurafaces in hyperbolic spaces*, Math. Z. 229 1998 589–600

[3] Cecil, T. and Ryan, P. *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. 269 (1982) 481–498

[4] Kimura, M. *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986) 137–149

[5] Maeda, Y. *On real hypersurfaces of a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan 28 (1976) 529–540

[6] Niebergall, R. and Ryan, Patric J. *Real hypersurfaces in complex space forms*, Tight and Taut Submanifolds MSRI Publication 32 (1997) 233–305

[7] Sekigawa, K. and Vanhecke, L. *Four-dimensional almost Kähler Einstein manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. 157 (1990) 149–160

[8] Tachibana, S. *On almost-analytic vectors in almost-Kählerian manifolds*, Tohoku Math. J. 11 (1959) 247–265

[9] Takagi, R. *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. 10 (1973) 495-506