コンパクト対称空間の
イソトロピー群の軌道

井川治　(福島工業高等専門学校)

この研究は§1, 2 については筑波大学数学系 田崎博之氏と筑波大学大学院 廣橋大悟氏との共同研究である。§3 については田崎氏と筑波大学大学院 酒井高司氏との共同研究である。

コンパクト対称空間 $M = G/K$ の接空間 $T_o(M)$ の一点 H の線形イソトロピー群の軌道 $K_*H \subset T_o(M)$ と M の一点 p のイソトロピー群の軌道 Kp について考察する。

1　線形イソトロピー群の軌道

(G, K) をコンパクト対称対とし、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とする。自然な方法で $T_o(M)$ と $\mathfrak{m}$ とを同一視すると線形イソトロピー軌道 K_*H は $\mathrm{Ad}(K)H$ となる。$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。$R(M)$ で M の制限ルート系を表す。$R(M)$ の基本系を $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ とし、$H_i \in \mathfrak{a}$ を $\langle H_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ で定める。$\gamma_0 = \sum_{i=1}^r m_i\gamma_i$ を最高の制限ルートとする。

$$C = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle H, \gamma_i \rangle > 0 \ (1 \leq i \leq r)\}$$

とおくと $H \in \bar{C}$ と仮定してよい。K の閉部分群 Z_K^H を

$$Z_K^H = \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H = H\}$$

と定めると $\mathrm{Ad}(K)H \cong K/Z_K^H$ となる。これにより、$\mathrm{Ad}(K)H$ には、部分多様体 $\mathrm{Ad}(K)H \subset \mathfrak{m}$ の誘導 Riemann 計量と正規等質 Riemann 計量という二つの Riemann 計量が入る。$\mathrm{Ad}(K)H$ のこれら二つの Riemann 計量に関する Levi-Civita 接続をそれぞれ ∇ と D で表す。

このとき、次が成り立つ。

定理 1.1 ([2]) 次は同値である。

(1) $\mathrm{Ad}(K)H$ は対称 R 空間の標準埋め込みである。
即ち、$H = xH_i \quad (m_i = 1, x > 0)$.
(2) $(K_0, Z_K^H \cap K_0)$ はコンパクト対称対である。
(3) $(\mathfrak{k}, \mathfrak{z}_K^H)$ は直交対称 Lie 代数である。
(4) $\mathrm{Ad}(K)H$ の正規等質 Riemann 計量と誘導 Riemann 計量は比例する。
(5) $\nabla = D$.

定義　群 Hが集合 Xに作用しているとする。$x \in X$に対して

$$H_x = \{h \in H \mid hx = x\}$$

とおく。$x_0 \in X$が、任意の $x \in X$に対してある $h \in H$が存在して $H_{x_0} \subset H_{hx}$を満たすとき、Hx_0を H作用の**主軌道**という。

命題 1.2 $H \in \bar{C}$に対して、$\mathrm{Ad}(K)H$が K作用の主軌道であるための必要十分条件は $A \in C$である。

以下、線形イソトロピー群の軌道の部分多様体としての性質に注目する。

定理 1.3 (Ohnita [5], Heintze-Olmos [1]) $X \in (\mathfrak{z}_K^H)^\perp$と $k \in K$とによって、$\mathrm{Ad}(K)H$の曲線 $c(t)$ を $c(t) = \mathrm{Ad}(k \exp tX)H$定め、$\xi \in T_H^\perp(\mathrm{Ad}(K)H) = [\mathfrak{k}, H]^\perp$をとって$\xi(t) = \mathrm{Ad}(k \exp tX)\xi$とおくと、$\xi(t)$ は曲線 $c(t)$ に沿った平行法ベクトル場になる。

上の定理を適用すると、北川-大仁田の次の定理が直ちに得られる。

定理 1.4 (Kitagawa-Ohnita [4]) $\mathrm{Ad}(K)H \subset \mathfrak{m}$ の平均曲率ベクトルは法接続に関して平行である。

C. Olmos と C. Sánchez[7] によって対称空間のイソトロピー群の軌道は Euclid 空間の部分多様体として特徴付けられている。このことを説明するためにいくつかの用語を定義する。

定義　Mを $\mathbf{R}^N$の連結 Riemann 部分多様体とする。任意の $p, q \in M$と p, qを結ぶ Mの曲線 c に対して、次の (1) から (3) を満たす $\mathbf{R}^N$の等長変換 gが存在するとき、Mを**定主曲率等質部分多様体**と呼ぶ。

(1) $g(M) = M$,

(2) $g(p) = q$,

(3) $dg_p|_{T_p^\perp M} = \tau_c^\perp : T_p^\perp(M) \to T_p^\perp(M)$.

定義　$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を Riemann 多様体とし、Mの Levi-Civita 接続を ∇ で表す。接ベクトル束 TM上の接続 ∇^cが次の (1) と (2) を満たすとき、∇^cを**標準接続**と呼ぶ。

(1) $\nabla^c\langle\ ,\ \rangle = 0$,

(2) $D = \nabla - \nabla^c$によって二次形式 Dを定めると、$\nabla^c D = 0$.

Mが $\mathbf{R}^N$の部分多様体のとき、Mの第二基本形式α に対して

$$(\nabla_X^c \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X^c Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X^c Z)$$

によって $\nabla^c\alpha$を定める。

定理 1.5 ([7]) Mを $\mathbf{R}^N$内の連結コンパクト充満部分多様体とし、Mの第二基本形式をαで表す。このとき、次の (1) から (3) は同値になる。
(1) Mは $\nabla^c\alpha = 0$ を満たす TMの標準接続 ∇^cを持つ。
(2) Mは定主曲率等質部分多様体になる。
(3) Mは対称空間の線形イソトロピー群の軌道になる。

定理 1.6 ([6]) Mを定曲率空間 Q の Riemann 部分多様体とする。$x \in M$における制限法ホロノミー群をΨ^*とする。Ψ^*はコンパクトで、Ψ^*の法空間への表現は、ある対称空間の線形イソトロピー表現と同値になる。

逆に、E. Heintze と C. Olmos ([1]) によってほとんど全ての対称空間 Xに対して、Euclid 空間内の Riemann 部分多様体 Mが存在して、Mの制限法ホロノミー群Ψ^*の法空間への表現と Xの線形イソトロピー表現と同値になることもわかっている。このことを証明するために次の定理が用いられた。

定理 1.7 ([1]) Mを非コンパクト型対称空間とし、$G = I_0(M)$ と仮定する。$H \in \mathfrak{m}$ をとり、$\mathrm{Ad}(K)H \subset \mathfrak{m}$ を考える。$\mathrm{Ad}(K)H$は $\mathfrak{m}$ の充満部分多様体と仮定する。このとき、$\mathrm{Ad}(K)H$ の法ホロノミー表現は Z_K^Hの $T_H^\perp(\mathrm{Ad}(K)H)$ への作用 (を効果的にしたもの) に同値になる。さらに、制限法ホロノミー表現は、Riemann 対称空間 $\mathrm{Exp}T_H^\perp(\mathrm{Ad}(K)H)$ のホロノミー表現に一致する。

2　イソトロピー群の軌道

次に $M = G/K$の一点 p のイソトロピー軌道 Kp について考察する。Kp は連結になる。

$$Q = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \gamma_i, H\rangle > 0 \ (1 \le i \le r),\ \langle \gamma_0, H\rangle < \pi\}$$

とおくと $p = \mathrm{Exp}H,\ H \in \bar{Q}$ としてよい。Kの閉部分群 N_K^Hを

$$N_K^H = \{k \in K \mid \exp(-H)k\exp H \in K\}$$

と定めると $Kp \cong K/N_K^H$となる。これにより、Kp には、部分多様体 $Kp \subset M$の誘導 Riemann 計量と正規等質 Riemann 計量という二つの Riemann 計量が入る。Kp のこれら二つの Riemann 計量に関する Levi-Civita 接続をそれぞれ$\boldsymbol{\nabla}$と$\boldsymbol{D}$で表す。
このとき、次が成り立つ。

定理 2.1 ([2])
(1) Kp が全測地的部分多様体

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i)H = \pi H_i/2 \quad (m_i = 2), \\ (ii)H = \pi H_i/2 \quad (m_i = 1), \\ (iii)H = \pi(H_i + H_j)/2 \quad (m_i = m_j = 1). \end{cases}$$

(2) $(\mathfrak{k}, \mathfrak{n}_K^H)$ が直交対称 Lie 代数

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i)H = \pi H_i/2 \quad (m_i = 2), \\ (ii)'H = \pi x H_i \quad (m_i = 1, 0 < x < 1), \\ (iii)'H = \pi(xH_i + (1-x)H_j)/2 \quad (m_i = m_j = 1, 0 < x < 1). \end{cases}$$

(3) 正規等質 Riemann 計量と誘導 Riemann 計量とが比例する

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i), (ii)', (iii)' \text{及び、} \\ (iv)H = \pi H_i/3 \quad (m_i = 2), \\ (v)H = \pi H_i/3 \quad (m_i = 3), \\ (vi)H = \pi(H_i + H_j)/3 \quad (m_i = 1, m_j = 2), \\ (vii)H = \pi(H_i + H_j)/3 \quad (m_i = m_j = 1), \\ (viii)H = \pi(H_i + H_j + H_k)/3 \quad (m_i = m_j = m_k = 1). \end{cases}$$

(4) $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{D} \Leftrightarrow (3)$.

注意　Mが adjoint space のときには、Kpが全測地的になることと $Kp = M^+(p)$ となることとは同値である。

注意　線形イソトロピー群やイソトロピー群の軌道の極小性については [3] で調べられている。

命題 2.2　$H \in \bar{Q}$とする。$K\mathrm{Exp}H$が K作用の主軌道ならば $H \in Q$ となる。G/Kが単連結のときは、逆も成り立つ。

3　Hermann 作用

$(G, K_1), (G, K_2)$ を二つのコンパクト対称対とする。K_2の $M_1 = G/K_1$への自然な作用を **Hermann 作用**という。

Hermann 作用は次の意味で hyperpolar action となる。

定義　Lie 群 G が Riemann 多様体 Mに等長的に作用しているとする。この作用が **hyperpolar action** であるとは、Mの平坦な部分多様体Σが存在して、

(1) $G\Sigma = M$,

(2) 各 $x \in \Sigma$に対して $T_x\Sigma \subset T_x^{\perp}(Gx)$

となる場合をいう。Σは**切断**とよばれ全測地的になる。

Hermann 作用において $K_1 = K_2$のときには Mの極大平坦トーラスが切断となる。

Hermann 作用の各軌道に対してそれに直交する全測地的部分多様体が存在する。

Hermann 作用の軌道の幾何学的性質を調べるために

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{m}_2$$

と二通りに標準分解する。$H \in \mathfrak{m}_1$とし、K_2-軌道 $K_2\mathrm{Exp}H \subset M_1$ を考える。このとき、

$$T_{\mathrm{Exp}H}(K_2\mathrm{Exp}H) = (\exp H)_*(\mathrm{Ad}(\exp(-H))\mathfrak{k}_2)_{\mathfrak{m}_1}.$$

$N^H_{K_2}[K_1]$ を

$$\begin{aligned} N^H_{K_2}[K_1] &= \{k \in K_2 \mid k\mathrm{Exp}H = H\} \\ &= \{k \in K_2 \mid \exp(-H)k\exp H \in K_1\} \end{aligned}$$

と定めると微分同型 $K_2\mathrm{Exp}H \cong K_2/N^H_{K_2}[K_1]$ が得られ $N^H_{K_2}[K_1]$ の Lie 環 $\mathfrak{n}^H_{K_2}[\mathfrak{k}_1]$ は

$$\mathfrak{n}^H_{K_2}[\mathfrak{k}_1] = \{X \in \mathfrak{k}_2 \mid \mathrm{Ad}(\exp(-H))X \in \mathfrak{k}_1\}$$

となる。

定理 3.1 $H \in \mathfrak{m}_1(\cong T_o(M_1)), Y \in (\mathfrak{n}^H_{K_2})^\perp(\cong T_{\mathrm{Exp}H}(K_2\mathrm{Exp}H))$ とする。$K_2\mathrm{Exp}H$内の曲線 $c(t)$ を

$$c(t) = \exp tX\mathrm{Exp}H$$

によって定める (一般には誘導計量に関する測地線ではない)。
$\xi \in (\mathrm{Ad}(\exp(-H))\mathfrak{k}_2)^\perp_{\mathfrak{m}_1}(\cong T^\perp_{\mathrm{Exp}H}(K_2\mathrm{Exp}H))$ とする。
$c(t)$ に沿う $K_2\mathrm{Exp}H$の法ベクトル場$\xi(t)$ を

$$\xi(t) = (\exp tY)_*(\exp H)_*\xi$$

によって定めると$\xi(t)$ は法接続に関して平行になる。

系 3.2 $K_2\mathrm{Exp}H \subset M_1$の平均曲率ベクトルは法接続に関して平行になる。

参考文献

[1] E. Heintze and C. Olmos, Normal holonomy groups and s-representations, Indiana Univ. Math. J., **41** (1992), 869–874.

[2] D. Hirohashi, O. Ikawa and H. Tasaki, Orbits of isotropy group of compact symmetric spaces, preprint.

[3] D. Hirohashi, H. Song, R. Takagi and H. Tasaki, Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type, to appear in Differential geometry and its applications.

[4] Y. Kitagawa and Y. Ohnita, On the mean curvature of R-spaces, Math. Ann., **262** (1983), 239–243.

[5] Y. Ohnita, The degrees of the standard imbeddings of R-spaces, Tôhoku Math. Journ., **35** (1983), 499-502.

[6] C. Olmos, The normal holonomy group, Proc. Amer. Math. Soc., **110** (1990), 813–818.

[7] C. Olmos and C. Sánchez, A geometric characterization of the orbit of s-representations, J. reine angew. Math., **420** (1991), 195–202.