A Characterization of Catenoid by Total Curvature

Masatoshi Kokubu

Department of Natural Science, Faculty of Engineering
Tokyo Denki University, Chiba 270-1382, Japan

We investigate a certain class of minimal surfaces in Euclidean space $\mathbf{E}^N$, which are called (strictly) m-isotropic minimal surfaces in this notes. An m-isotropic minimal surface cannot exist in the space of dimension lower than $2m+1$. We make good use of an representation formula due to Ejiri, which provides a powerful method for constructing explicit examples.

In the study of minimal surface theory, the total curvature is one of the central topics. Some interesting inequalities for the total curvature are known. We introduce that the catenoid can be characterized as the least-curved minimal surface in the following sense:

The catenoid in $\mathbf{E}^3$ is the only strictly m-isotropic complete minimal surface in $\mathbf{E}^{2m+1}$, which attains equalities both in Chern-Osserman's Inequality and in Ejiri's Inequality.

1 準備

M にて Riemann 面を表し, $f\colon M \to \mathbf{E}^n$ にて共形的はめ込みを表すものとする．f が極小はめ込みであることは $f=(f^1,\dots,f^N)$ の各座標関数 f^j が M 上の調和関数であることに同値であった．したがって，極小はめ込み f は (少なくとも局所的には) $\mathbf{C}^N$ の正則曲線の実部として表すことができる．より詳しくは，$f\circ\pi=\operatorname{Re}F$ となる等方的正則曲線 $F\colon\tilde{M}\to\mathbf{C}^N$ が存在する，と述べることができる．ここで，$\pi\colon\tilde{M}\to M$ は普遍被覆を表し，等方的とは $\langle dF, dF\rangle=0$ であることを意味する．もしくは，(多価の) 等方的正則曲線 $F\colon M\to\mathbf{C}^N$ が存在して $f=\operatorname{Re}F$ が成り立つ，と言ってもよい．

例 1 (Enneper's surface) $M=\mathbf{C}$,

$$f(z)=\operatorname{Re}\left(3z-z^3,\ i(3z+z^3),\ 3z^2\right) \tag{1}$$

例 2 (Catenoid) $M=\mathbf{C}\setminus\{0\}$,

$$f(z)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z}-z\right),\ \frac{i}{2}\left(-\frac{1}{z}+z\right),\ \log z\right) \tag{2}$$

例 3 (Jorge-Meeks' n-noid) $M=(\mathbf{C}\cup\{\infty\})\setminus\{z^n=1\}$,

$$f(z)=\operatorname{Re}\left(\int\frac{1-z^{2n-2}}{2(z^n-1)^2}dz,\ \int\frac{i(1+z^{2n-2})}{2(z^n-1)^2}dz,\ \int\frac{z^{n-1}}{(z^n-1)^2}dz\right) \tag{3}$$

このような極小はめ込み f にたいして，次の定義* を思い出そう．

定義 1 極小はめ込み $f\colon M\to\mathbf{E}^N$ は,

$$\langle f^{(k)}, f^{(k)}\rangle = 0\,(1\le k\le m) \tag{4}$$

が成り立つとき, m **等方的** (m-isotropic) であるという．そして, m 等方的であるが $(m+1)$ 等方的ではないとき, **強** m **等方的**† (strictly m-isotropic) であると呼ぶ.

式 (4) において，$f^{(k)}$ は M の局所座標 z による k 階の導関数である．条件 (4) は局所座標 z のとりかたによらないことを注意しておく．

* 他の文献では, m 等方的という用語を, ここでいう強 m 等方的の意味で使っていることが多いようです.

† 平面以外の $\mathbf{E}^3$ の極小曲面はみな strictly 1-isotropic であることが示される．したがって，$\mathbf{E}^N$ の strictly m-isotropic な極小曲面を，極小曲面の特別なものととらえるよりもむしろ，$\mathbf{E}^3$ の (非平坦) 極小曲面の一般化と理解してほしい.

2　等方的曲線

正則曲線 $F\colon M \to \mathbf{C}^N$ (より一般に有理形曲線) も，条件 (4) をみたすとき，m 等方的 (m-isotropic) と呼ぶこととする．極小はめ込み $f = \mathrm{Re}\, F$ が m-isotropic であるための必要十分条件は F が m-isotropic であることとなる．以下，(強) m 等方的有理形曲線を単に (strictly) m-isotropic curve と呼ぶ．

命題 1　(1) $\mathbf{C}^N$ に strictly m-isotropic curve $F\colon M \to \mathbf{C}^N$ が存在したならば $2m+1 \leq N$ でなければならない．

(2) m-isotropic curve $F\colon M \to \mathbf{C}^{2m+1}$ にたいして，strict であることと full であることは同値である．

命題 1 の (1) は, strictly m-isotropic curve は次元が $2m+1$ 以上の空間にしか生息できないことを意味する．最小の次元 $2m+1$ の空間の strictly m-isotropic curve は次の特筆すべき性質を持つ．

定理 1 (Weierstrass-Ejiri の公式) ([2])
任意の full, $(m-1)$-isotropic curve $G\colon M \to \mathbf{C}^{2m-1}$ と任意の有理形関数 g ($\neq a\langle G, G\rangle + \langle B, G\rangle + c$) にたいして,

$$\langle G^{(k)}, H\rangle = g^{(k)} \ (k = 1, 2, \ldots, 2m-1)$$

の唯一解 $H\colon M \to \mathbf{C}^{2m-1}$ が存在する．更に $h = \langle G, H'\rangle / \langle G, G'\rangle$ と定める．このとき,

$$\left(\frac{1}{2}\{1 - \langle G, G\rangle\}h + \langle H, G\rangle - g,\ \frac{i}{2}\{1 + \langle G, G\rangle\}h - i\langle H, G\rangle + ig,\ hG - H\right)$$

は $\mathbf{C}^{2m+1}$ の full m-isotropic curve である．

逆に, 任意の full m-isotropic curve $F : M \to \mathbf{C}^{2m+1}$ はこのような g, G による表示ができる．(我々はこれを $F = \mathrm{WE}(M, G, g)$ と書く．)

Enneper's surface は $F = \mathrm{WE}(\mathbf{C}, z, z^3)$ の実部であることが分かる．すなわち, $G(z) = z$ と $g(z) = z^3$ から Weierstrass-Ejiri の公式により構成される F の実部は (1) である．また, Catenoid (2) が $F = \mathrm{WE}(\mathbf{C} \setminus \{0\}, z, z\log z)$ の実部であることも容易に確かめられる．

命題 1，定理 1 の証明は，例えば数理解析研究所講究録 No.1113 (1999), 65–84 を見てください．

Weierstrass-Ejiri の公式を再帰的に使うことにより，m-isotropic curve (したがって m-isotropic な極小はめ込み) の (局所的な) 例はいくらでもできる．ただし完備性などの条件をつけると簡単ではない．我々は Enneper's surface を基にして次の例を構成した．

命題 2 ([5])

$$F_0(z) = z,\ F_m = \mathrm{WE}(\mathbf{C}, F_{m-1}, z^{2m+1})\ (m \geq 1)$$

は，帰納的に strictly m-isotropic curve $F_m\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{2m+1}$ を定める．その実部 $\mathrm{Re}\, F_m\colon \mathbf{C} \to \mathbf{E}^{2m+1}$ は単連結，完備，全曲率 $-4m\pi$ の極小曲面を与える．とくに, $\mathrm{Re}\, F_1$ は Enneper's surface である．

同様に，Catenoid を一般化した例も構成したい．命題 2 で得た F_m を使って，

$$C_m := \mathrm{WE}(\mathbf{C} \setminus \{0\}, F_{m-1}, z^m \log z)$$

により，多価 strictly m-isotropic curve $C_m\colon \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}^{2m+1}$ が得られる．このとき，$\mathrm{Re}\, C_m$ は一価で，全曲率 $-4m\pi$ の完備極小曲面を与えるのではないかと予想している．実際に $m = 1, 2, 3$ の場合は正しいこと，および $\mathrm{Re}\, C_1$ が Catenoid であることが直接 C_1, C_2, C_3 を計算することにより確かめることができる ([5])．しかし，一般の m の場合は未解決である．

3　全曲率

$\mathbf{E}^N$ の極小曲面のガウス曲率 K はいたるところ負または 0 で，完備極小曲面の全曲率 (ガウス曲率を曲面上で積分した値) は (有限全曲率ならば) 2π の整数倍であった．ここでは次の結果に注目する．

$f\colon M \to \mathbf{E}^N$ を，種数 g, end の数 r の完備極小曲面とする．このとき

- **(Chern-Osserman の不等式)**[1]

$$\int_M K dA \leq 4(1 - g - r)\pi \tag{5}$$

- **(Ejiri の不等式)**[3] f が full で k-degenerate‡ ならば

$$\int_M K dA \leq 2(1 - g - N + k)\pi. \tag{6}$$

‡ ガウス写像 $[\partial f]\colon M \to \mathbf{C}P^{N-1}$ の像を含む最小次元の部分空間の次元が $N - 1 - k$ であることを意味する．

が成り立つ．Jorge と Meeks は Chern-Osserman の不等式で等号が成り立つための必要十分条件がすべての end が embedded であることを示し，実際に，任意の end の数で具体例を構成した ([4])．それが Jorge-Meeks' n-noid (3) である．

一方，Ejiri の不等式については，我々の構成した $\mathrm{Re}\,F_m$ ($m=1,2,3,\ldots$), $\mathrm{Re}\,C_m$ ($m=1,2,3$) が等号を成り立たせることが分かる．

したがって，Catenoid は両方の不等式において等号が成り立つ例となっている．$\mathbf{E}^3$ の極小曲面に限れば，そのような例は Catenoid しかないことは自明である[§]．もう少し広いクラスでもそうであることが言える：

定理 2 ([5]) $\mathbf{E}^{2m+1}$ 内の strictly m-isotropic な完備極小曲面で，Chern-Osserman の不等式および Ejiri の不等式で等号をみたすものは Catenoid に限る．

定理 2 の証明は [5] を見ていただくことにして，ひとつだけ注意を述べる． 3 つの仮定「$\mathbf{E}^{2m+1}$ 内で strictly m-isotropic であること」,「Chern-Osserman の不等式で等号をみたすこと」,「Ejiri の不等式で等号をみたすこと」のうちひとつでも欠落すると Catenoid 以外の例が少なくとも可算無限個存在する．その意味で定理 2 は sharp である．

参考文献

[1] S. Chern and R. Osserman, 'Complete minimal surfaces of in euclidean n-space', *J. d'Analyse Math.* 19 (1967), 15–34

[2] N. Ejiri, 'A Darboux theorem for null curves in C^{2m+1}', Lecture Notes Vol.2, Geometry and Global Analysis, at Tohoku Univ. (1993)

[3] N. Ejiri, 'Degenerate minimal surfaces of finite total curvature in R^N', *Kobe J. Math.* 14 (1997), 11–22

[4] L. P. M. Jorge and W. H. Meeks III, 'The topology of complete minimal surfaces of finite total curvature', *Topology* 22 (1983), 203–221

[5] M. Kokubu, 'Remarks on isotropic minimal surfaces in Euclidean space', preprint

[§] $\mathbf{E}^3$ の完備極小曲面で全曲率 -4π のものは Catenoid と Enneper's surface のみである．