# Two-step nilpotent Lie groups

Hiroshi Tamaru

Department of Mathematics, Sophia University, Tokyo 102-8854, Japan

We treat two-step nilpotent Lie groups endowed with left invariant metrics, often called two-step homogeneous nilmanifolds.

The story of the study on two-step homogeneous nilmanifolds can be summarized as follows: construct two-step nipotent metric Lie algebras $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ from well-known object, and investigate the attached nilmanifolds $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ in terms of that object. The attached nilmanifold means that $N$ is the simply connected Lie group with the Lie algebra $\mathfrak{n}$ and $\langle\ ,\ \rangle$ denotes the induced left invariant metric.

In this talk we introduce the following classes of two-step nilmanifolds and mention their geometric properties, especially on the isometry groups.

(i) Heisenberg groups. From certain type of matrics, one can construct the following metric Lie algebra, called the 3-*dimensinal Heisenberg Lie algebra*:

$$\mathfrak{n} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}({}^t XY).$$

The attached nilmanifold, called 3-*dimensinal Heisenberg group*, can be investigated by direct matrics calculations.

(ii) $H$-type groups. From a representaion of a Clifford algebra $Cl(\mathfrak{z})$ on $\mathfrak{v}$, Kaplan ([2]) constructed two-step nilpotent metric Lie algebras by defining the bracket products on $\mathfrak{n} := \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$. The attached nilmanifolds, called *H-type groups*, can be investigated in terms of the Clifford modules.

(iii) Nilmanifolds constructed from symmetric spaces. Let $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ be a compact symmetric pair. By defining the other bracket product on $\mathfrak{g}$, one can construct a two-step nilpotent metric Lie algebra ([5]). The attached nilmanifold can be investigated by applying the theory of symmetric spaces.

(iv) Nilmanifolds attached to representations. From a representation of a compact Lie algebra $\mathfrak{k}$ on $V$, Lauret ([3]) constructed a two-step nilpotent metric Lie algebra $\mathfrak{n} := \mathfrak{k} \oplus V$. The attached nilmanifold can be investigated in terms of the theory of Lie algebras and representations.

# 1 Introduction

**定義 1.1** Lie algebra $\mathfrak{n}$ が<u>*2-step nilpotent*</u>であるとは, $[\mathfrak{n},[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]]=0$ が成立すること.

**記号 1.2** $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ で正定値内積の入った *2-step nilpotent Lie algebra* を表す. また, $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ でその単連結 *Lie group* と $\langle\ ,\ \rangle$ から決まる左不変計量を表す.

$(N,\langle\ ,\ \rangle)$ の性質を $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ を用いて調べる事が目標. 特に isometry group は $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ によって完全に決定することができる.

**定理 1.3 (Wilson [6])** $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ の *isometry group* を $\mathrm{Isom}(N,\langle\ ,\ \rangle)$ とし, 単位元 $1\in N$ での *isotropy subgroup* を $A(N)$ とすると,

(i) $\mathrm{Isom}(N,\langle\ ,\ \rangle)=N\cdot A(N)=A(N)\cdot N$,
(ii) $A(N)\cong \mathrm{Aut}\ (\mathfrak{n})\cap O(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$.

すなわち, isometry group を決定するためには, $A(N)$ を決定できれば良い.
本講演では 2-step nilpotent Lie group のクラスをいくつか紹介し, それらの isometry group に関して触れていきたい.

**記号 1.4** $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ に対して, 次の記号を断りなく使う :
$\mathfrak{z}:=\mathit{center}(\mathfrak{n})$, $\quad\mathfrak{v}:=(\mathfrak{z})^{\perp}$,
$J:\mathfrak{z}\to \mathit{End}(\mathfrak{v})$ *defined by* $\langle J_Z(X),Y\rangle=\langle Z,[X,Y]\rangle$ *for* $Z\in\mathfrak{z},\ X,Y\in\mathfrak{v}$.

**補題 1.5** $A(N)(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}$, $A(N)(\mathfrak{v})=\mathfrak{v}$.

**証明.** $\forall Z\in\mathfrak{z}$, $[g(Z),\mathfrak{n}]=g([Z,g^{-1}(\mathfrak{n})])=g([Z,\mathfrak{n}])=0$. すなわち $g$ は $\mathfrak{z}$ を保つ. $g$ は内積も保つので, その直交補空間 $\mathfrak{v}$ も保つ. Q.E.D.

**注 1.6** よって $A(N)=\mathrm{Aut}\ (\mathfrak{n})\cap(O(\mathfrak{z},\langle\ ,\ \rangle)\times O(\mathfrak{v},\langle\ ,\ \rangle))$ が成立する.

# 2 Heisenberg group

まず始めに, 2-step nilpotent group の中でも最も単純な例を挙げる.

**定義 2.1** 次で与えられる $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ を<u>3 次元 *Heisenberg Lie algebra*,</u> それから決まる $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ を<u>3 次元 *Heisenberg group*</u>と呼ぶ :

$$\mathfrak{n}:=\left\{\begin{pmatrix}0&x&z\\0&0&y\\0&0&0\end{pmatrix}\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\},\qquad \langle X,Y\rangle:=\mathrm{tr}({}^tXY).$$

**注 2.2** 一般に, $2n+1$ 次元 *Heisenberg Lie algebra* とは, 次で定義されるもの :

$$\mathfrak{n} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & & & & y_1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & y_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}({}^t XY).$$

**命題 2.3** $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ を 3 次元 *Heisenberg Lie algebra* とすると,

$$\mathfrak{z} := \left\{ Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{v} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad J_Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zy \\ zx \end{pmatrix}.$$

**証明.** bracket 積が以下のようになってることより, 簡単に示せる :

$$[\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x' & z' \\ 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xy' - x'y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

**命題 2.4** $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ を *Heisenberg group* とすると $A(N) = O(2)$. ここで $O(2)$ は $\mathfrak{z} = o(2)$, $\mathfrak{v} = \mathbb{R}^2$ によって $\mathfrak{n}$ に作用する.

**証明.**
$$\begin{aligned} A(N) &= \mathrm{Aut}\ (\mathfrak{n}) \cap (O(\mathfrak{z}, \langle\ ,\ \rangle) \times O(\mathfrak{v}, \langle\ ,\ \rangle)) \\ &= \{(\alpha, X) \in O(1) \times O(2) \mid \alpha[v,w] = [Xv, Xw] \ \text{ for } \ \forall v, w \in \mathfrak{v}\} \\ &= \{(\alpha, X) \in O(1) \times O(2) \mid \alpha = \det X\} \\ &= O(2). \end{aligned} \qquad \text{Q.E.D.}$$

# 3 $H$-type groups

この節では, Heisenberg group の一般化として良く知られている generalized Heisenberg group について述べる. この名前は長いので, $H$-type group と呼ばれる事が多い. $H$-type group は Kaplan ([2]) によって導入された. 詳しいことは [1] 参照.

**定義 3.1** $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ が *H-type Lie algerba* であるとは, $\forall Z \in \mathfrak{z}$, $J_Z^2 = -\langle Z, Z \rangle id_{\mathfrak{v}}$ が成立すること. またこのとき, 対応する $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ を *H-type group* と呼ぶ.

**例 3.2** 3 次元 *Heisenberg group* $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ は *H-type.*

**証明.** $J$ が分かっているので, 直接確かめれば良い. $\mathfrak{v} = \mathbb{R}^2$ と同一視すると,

$$J_Z^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J_Z \begin{pmatrix} -zy \\ zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z^2 x \\ -z^2 y \end{pmatrix} = -\langle Z, Z \rangle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

**命題 3.3 (Kaplan [2])** (i) $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ が *H-type* ならば, $\mathfrak{v}$ は $Cl(\mathfrak{z}, -\langle\ ,\ \rangle)$*-module.*
(ii) $\mathfrak{v}$ が $Cl(\mathfrak{z}, -\langle\ ,\ \rangle)$*-module* ならば, $\mathfrak{n} := \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ には *H-type Lie algebra* の構造が入る.

**証明.** (i) $H$-type algebra の定義式より, $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ を $Cl(\mathfrak{z}, -\langle\ ,\ \rangle)$ に拡張できる.
(ii) $\mathfrak{v}$ が $Cl(\mathfrak{z}, -\langle\ ,\ \rangle) -$ module
$\Rightarrow$ $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$: Clifford algebra の作用によって定義
$\Rightarrow$ $[\mathfrak{z}, \mathfrak{n}] := 0,\ [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}$ を $\langle [X, Y], Z\rangle = \langle J_Z X, Y\rangle$ for $X, Y \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z}$
として $\mathfrak{n}$ 上に積を定義すれば $H$-type. Q.E.D.

**注 3.4** *H-type group* と *Clifford module* の適当な同値類は $1:1$ に対応する.

**定理 3.5 (Riehm [4])** $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ を *H-type group* とすると $A(N) = Pin(m)U$ $(m := \dim \mathfrak{z})$. ここで $Pin(m)$ は $\mathfrak{z} = \mathbb{R}^m$ に $O(m)$ として, $\mathfrak{v}$ には $J$ *(i.e., spin* 表現*)* で作用し, $U := \{g \in O(\mathfrak{v}, \langle\ ,\ \rangle) \mid g$ は $Cl(\mathfrak{z}, -\langle\ ,\ \rangle)$ と可換$\}$ の $\mathfrak{z}$ への作用は *trivial.*

**例 3.6** $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ を 3 次元 *Heisenberg group* とすると $A(N) = O(2)$.

**証明.** $Cl(\mathfrak{z}, -\langle\ ,\ \rangle) = Cl_1 = \mathbb{C}$ であり, $\mathfrak{v} = \mathbb{C}$ (左から作用) となる. $Pin(1) = \mathbb{Z}_2$, $U = U(1)$ ($\mathbb{C}$ に右から作用) である. よって $A(N) = \mathbb{Z}_2 \cdot U(1) = O(2)$. Q.E.D.

# 4 Symmetric spaces

次に, 対称空間から構成される 2-step nilpotent Lie group について述べる. $M = G/K$ を compact 既約対称空間とし, 対応する Lie algebra の分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ と書く. $M = G/K$ から nilpotent group を構成し, その性質を対称空間の理論を使って調べる.

**定義 4.1** $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ に以下で定義した *bracket* 積 $[\ ,\ ]^{\mathfrak{n}}$ と内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を入れた *Lie algebra* を $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ で, 対応する $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ を $N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ で表す *:*
$[Z + X, Z' + X']^{\mathfrak{n}} := [X, X']$ *for* $Z, Z' \in \mathfrak{k}, X, X' \in \mathfrak{m}$
$\langle\ ,\ \rangle := (-1) \times (\text{Killing form})$.

**例 4.2** $N(so(3), so(2))$ は 3 次元 *Heisenberg group.*

**証明.** $so(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ として良い. 同型写像は次で与えられる :

$$f : so(3) \ni \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

**定理 4.3 ([5])** $N = N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ とすると $A(N) = \{g \in \mathrm{Aut}\ (\mathfrak{g}) \mid g(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}\}$, 特に $\mathrm{Lie}(A(N)) = \mathfrak{k}$.

**注 4.4** Aut $(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ に元々与えられていた *compact Lie algebra* としての構造に関する *automorphism group.* 「$g \in A(N) \Rightarrow g \in \mathrm{Aut}\ (\mathfrak{g})$」 の証明が本質的.

**例 4.5** 3 次元 *Heisenberg group* $N = N(so(3), so(2))$ を考えると $A(N) = O(2)$.

**証明.** Aut $(so(3)) = SO(3)$, その中で $so(2)$ を保つものは $O(2)$. Q.E.D.

**注 4.6** この事実は $S^2 = SO(3)/SO(2)$ と局所同型な対称空間 $\mathbb{R}P^2 = SO(3)/O(2)$ が存在することと対応している.

**定理 4.7 ([5])** (i) $N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は全て *naturally reductive,* (ii) $N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ のうち弱対称であるものは $N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (so(n+1), so(n))$ *or* $(su(n+1), u(n))$ の場合.

**注 4.8** 定理の (ii) は対称空間のルート系の理論を使って証明できる.

# 5 Representation of compact Lie groups

最後に最近 Lauret ([3]) によって導入された nilpotent group のクラスについて話をしたい. compact Lie algebra $\mathfrak{k}$ の $V$ への表現を考え, $\mathfrak{k} \oplus V$ に bracket 積を定義して nilpotent group を構成する. $V$ は trivial submodule を含まないと仮定しておく.

**定義 5.1** $\mathfrak{k}$ の $V$ への作用を $J$, $\mathfrak{k} \oplus V$ 上の $\mathfrak{k}$-不変内積を $\langle\ ,\ \rangle$ とする. $\mathfrak{k} \oplus V$ に

$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k} \oplus V] := 0,$

$[V, V] \in \mathfrak{k}$ *defined by* $\langle [v, w], Z\rangle = \langle J_Z(v), w\rangle$ *for* $v, w \in V,\ Z \in \mathfrak{k}$

によって積を定義した *Lie algebra* を $\mathfrak{n}(\mathfrak{k}, V, \langle\ ,\ \rangle)$ で, 対応する $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ を $N(\mathfrak{k}, V, \langle\ ,\ \rangle)$ で表す.

**命題 5.2** $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ *: symmetric pair* とすると $N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = N(\mathfrak{k}, \mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$. ここで $\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{m}$ への作用は *isotropy* 表現とし, $\langle\ ,\ \rangle := (-1) \times$ *Killing form.*

**注 5.3** すなわち, 対称空間から構成されたクラスは表現から構成されたクラスに含まれる.

**例 5.4** $so(2)$ の $\mathbb{R}^2$ への自然な表現から構成した *Lie algebra* が 3 次元 *Heisenberg Lie algebra* になる. $so(2)$ の $\mathbb{R}^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^2$ *(*$n$ 個の直和*)* への表現から構成すると $(2n+1)$ 次元 *Heisenberg Lie algebra* ができる.

**定理 5.5 (Lauret [3])** $N = N(\mathfrak{k}, V)$ に対して $\mathrm{Lie}A(N) = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus u$. ただしここで $u := \{f \in o(V, \langle\ ,\ \rangle) \mid [f, \mathfrak{k}] = 0\}$ は $\mathfrak{k}$ に *trivial* に作用する.

**注 5.6** $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ は $\mathfrak{k}$ の *semi-simple part* であり, $\mathfrak{k}$ の *abelian part* は $u$ に含まれる. すなわち $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Lie}A(N)$.

**定理 5.7 (Lauret [3])** $N(\mathfrak{k}, V)$ は *naturally reductive.* 逆に, $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] = \mathfrak{z}$ を満たす全ての *naturally reductive* 2*-step nilpotent group* はこの方法で構成される.

# 参考文献


[1] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin Heidelbelg 1995.

[2] A. Kaplan, Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules, *Geom. Dedicata* **11** (1981), 127-136.

[3] J. Lauret, Homogeneous nilmanifolds attached to representations of compact Lie groups, *Manuscripta Math.*, **99** (1999), 287-309.

[4] C. Riehm, Explicit spin representations and Lie algebras of Heisenberg type, *J. London Math. Soc.* (2) **29** (1984), 403-414.

[5] H. Tamaru, Symmetric spaces and two-step nilpotent Lie groups, in preparation.

[6] E. Wilson, Isometry groups on homogeneous nilmanifolds, *Geom. Dedicata* **12** (1982), 337-346.