

曲面上の孤立臍点の指数

安藤 直也 (東大数理, 学振特別研究員)

S を \mathbf{R}^3 の滑らかな曲面とし $\text{Umb}(S)$ を S の臍点全体からなる集合とし, $\text{Reg}(S) := S \setminus \text{Umb}(S)$ とおく. もし $\text{Reg}(S) \neq \emptyset$ ならば $\text{Reg}(S)$ 上の一次元連続分布で $\text{Reg}(S)$ の各点に主方向を与えるものが存在する. そのような分布を S 上の主分布 という. $\text{Reg}(S)$ の点の周りでの主分布のふるまいを描写するのは容易である: その点で零ならざるベクトル場を用いて主分布を (局所的に) 表すことができる. 一方臍点の周りでの主分布のふるまいは非常に複雑な場合があり, また一般にはいかなるベクトル場を用いても主分布を表すことができない場合がある. p_0 を孤立臍点とするとき, 二つの主分布の共通の孤立特異点である p_0 の指数は互いに等しいが, この共通の数を S 上での p_0 の指数 といい $\text{ind}_{p_0}(S)$ で表す. (x, y) を p_0 の周りの局所座標系で p_0 が $(0, 0)$ に対応するものとし, r_0 は正の実数で $\{0 < x^2 + y^2 < r_0^2\} \cap \text{Umb}(S) = \emptyset$ をみたすものとする. また $\phi_{S;p_0}$ は $(0, r_0) \times \mathbf{R}$ 上の連続関数で各 $(r, \theta) \in (0, r_0) \times \mathbf{R}$ に対し点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ における接ベクトル

$$\cos \phi_{S;p_0}(r, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi_{S;p_0}(r, \theta) \frac{\partial}{\partial y}$$

が主方向に含まれるものとする. このとき p_0 の指数 $\text{ind}_{p_0}(S)$ は次のように表される:

$$\text{ind}_{p_0}(S) = \frac{\phi_{S;p_0}(r, \theta + 2\pi) - \phi_{S;p_0}(r, \theta)}{2\pi}.$$

l を $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ の元とし, F を \mathbf{R}^2 における $(0, 0)$ の連結な近傍上定義された滑らかな関数で $\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}(0, 0) = 0$ が $0 \leq m + n < l$ なる非負整数 m, n に対しなりたつものとし, F のような関数全体からなる集合を $\mathcal{C}_o^{(\infty, l)}$ で表す. このとき $l \in \mathbf{N}$ に対して次がなりたつ:

$$\mathcal{C}_o^{(\infty, l)} \supset \mathcal{C}_o^{(\infty, l+1)} \supset \mathcal{C}_o^{(\infty, \infty)} \supsetneq \{0\}.$$

S の各点 p に対して \mathbf{R}^3 上の直交座標系 (x, y, z) および $\mathcal{C}_o^{(\infty, 2)}$ の元 F があって次がなりたつ:

- (1) p は \mathbf{R}^3 の原点 $o := (0, 0, 0)$ に対応する;
- (2) xy 平面は p で S に接している;

(3) F の graph G_F は S における p の近傍である.

自然数 l に対し $\mathcal{C}_o^{(\infty,l)}$ の部分集合 $\mathcal{C}_o^{(\infty,l)}$ を次のように定義する:

$$\mathcal{C}_o^{(\infty,l)} := \{F \in \mathcal{C}_o^{(\infty,l)} ; o \in \text{Umb}(G_F), \text{Reg}(G_{F-f}) \neq \emptyset, \forall f \in \mathcal{C}_o^{(\infty,\infty)}\}.$$

すると $\mathcal{C}_o^{(\infty,2)}$ の各元 F に対し $\mathcal{C}_o^{(\infty,3)}$ の元 f_F があって $\text{Reg}(G_{F-f_F}) = \emptyset$ がなりたつ. 非負整数 k に対し \mathcal{P}^k を次数 k の二変数同次多項式全体からなる集合とする. このとき $\mathcal{C}_o^{(\infty,2)}$ の各元 F に対し 3 以上の整数 k_F および \mathcal{P}^{k_F} の元 g_F があって $f_F - g_F \in \mathcal{C}_o^{(\infty,k_F+1)}$ がなりたつ. \mathcal{P}^k の元 g および 各実数 θ に対し $\text{Hess}_g(\theta)$ を点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ での g の Hessian とし, η_g を \mathbf{R} 上の連続関数で各実数 θ に対しベクトル ${}^t(\cos \eta_g(\theta), \sin \eta_g(\theta))$ は $\text{Hess}_g(\theta)$ の固有ベクトルであるものとし, また

$$S_g := \{\theta_0 \in \mathbf{R} ; \text{Hess}_g(\theta_0) = \lambda E, \exists \lambda \in \mathbf{R}\}$$

とおく. $\mathcal{C}_o^{(\infty,2)}$ の元でその graph 上 \mathbf{R}^3 の原点 o が孤立臍点であるもの全体からなる集合を $\mathcal{C}_o^{\infty,2}$ で表し, また

$$\mathcal{P}_o^k := \mathcal{P}^k \cap \mathcal{C}_o^{\infty,2}, \quad \mathcal{C}_{oo}^{\infty,2} := \{F \in \mathcal{C}_o^{\infty,2} ; g_F \in \mathcal{P}_o^{k_F}\}$$

とおく. また $\mathcal{C}_o^{\infty,2}$ の各元 F に対し ϕ_F は \mathbf{R}^3 の xy 平面上の標準的な座標系 (x, y) に関する関数 $\phi_{G_F;o}$ を表すことにする. このとき次がなりたつ:

命題 1 F を $\mathcal{C}_o^{\infty,2}$ の元とする. このとき

(1) $\mathbf{R} \setminus S_{g_F}$ の各元 θ_0 に対し,

- (a) 実数 $\phi_{F,o}(\theta_0)$ が存在して $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_F(r, \theta_0) = \phi_{F,o}(\theta_0)$ がなりたつ,
- (b) ベクトル ${}^t(\cos \phi_{F,o}(\theta_0), \sin \phi_{F,o}(\theta_0))$ は $\text{Hess}_{g_F}(\theta_0)$ の固有ベクトルである;

(2) 各実数 θ_0 に対し,

- (a) 二つの実数 $\phi_{F,o}(\theta_0 + 0), \phi_{F,o}(\theta_0 - 0)$ が存在して次がなりたつ:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0 \pm 0} \phi_{F,o}(\theta) = \phi_{F,o}(\theta_0 \pm 0),$$

- (b) $\Gamma_{F,o}(\theta_0) := \phi_{F,o}(\theta_0 + 0) - \phi_{F,o}(\theta_0 - 0)$ は $\{n\pi/2\}_{n \in \mathbf{Z}}$ の元である;

(3) o の指数 $\text{ind}_o(G_F)$ は次のように表される:

$$\text{ind}_o(G_F) = \frac{\eta_{g_F}(\theta + 2\pi) - \eta_{g_F}(\theta)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\theta_0 \in S_{g_F} \cap [\theta, \theta + 2\pi)} \Gamma_{F,o}(\theta_0).$$

特に次がなりたつ:

命題 2 F は $C_o^{\langle \infty, 2 \rangle}$ の元で $S_{g_F} = \emptyset$ をみたすものとする. このとき $F \in C_{oo}^{\infty, 2}$ でありかつ次がなりたつ:

$$\text{ind}_o(G_F) = \text{ind}_o(G_{g_F}) = \frac{\eta_{g_F}(\theta + 2\pi) - \eta_{g_F}(\theta)}{2\pi}.$$

命題 1 や命題 2 における同次多項式 g_F から得られる量 $\eta_{g_F}(\theta + 2\pi) - \eta_{g_F}(\theta)$ の計算手順は既に見い出されている. 一方命題 1 における $\Gamma_{F,o}(\theta_0)$ なる量を把握することは一般的には難しい. 次の二つの定理はこの問題に対する部分解答を与える:

定理 3 k を 3 以上の自然数とし g を \mathcal{P}_o^k の元とする. このとき

- (1) S_g の各元 θ_0 に対し $\Gamma_{g,o}(\theta_0) = -\pi/2$ がなりたつ;
- (2) $\text{ind}_o(G_g) \in \{1 - k/2 + i\}_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor}$ がなりたつ.

定理 4 F を $C_{oo}^{\infty, 2}$ の元とする. このとき

- (1) S_{g_F} の各元 θ_0 に対し $-\pi/2 \leq \Gamma_{F,o}(\theta_0) \leq \pi/2$ がなりたつ;
- (2) $\text{ind}_o(G_{g_F}) \leq \text{ind}_o(G_F) \leq 1$ がなりたつ.

一般に, 孤立臍点 p_0 を有する滑らかな曲面 S に対し $\text{ind}_{p_0}(S) \leq 1$ という不等式が期待されてきた. この予想に関連して二つの予想が知られている: Carathéodory 予想と Loewner 予想である. Carathéodory 予想とは compact かつ強凸なる曲面には二つ以上臍点が存在するのではというものである. もし $\text{ind}_{p_0}(S) \leq 1$ ならば compact, 向き付け可能で genus 0 の曲面には二つ以上臍点が存在することが Hopf-Poincaré の定理を用いてわかり, compact かつ強凸なる曲面は向き付け可能かつ genus 0 なので結局 Carathéodory 予想を肯定的に解決することができる. F を二実変数の実数値をとる滑らかな関数とし, $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right)$ とおく. このとき自然数 n に対する Loewner 予想とはベクトル場 $\text{Re}(\partial_{\bar{z}}^n F) \frac{\partial}{\partial x} + \text{Im}(\partial_{\bar{z}}^n F) \frac{\partial}{\partial y}$ の孤立零点の指数は n 以下なのではというものである ([4], [6]). $n = 2$ に対する Loewner 予想は上に述べた予想 $\text{ind}_{p_0}(S) \leq 1$ と同値である ([5]). これらの予想に関連して次の定理がなりたつ:

定理 5 F は $C_o^{\infty, 2}$ の元で S_{g_F} の各元 θ_0 に対し $\Gamma_{F,o}(\theta_0) \leq \pi$ がなりたつものとする. このとき $\text{ind}_o(G_F) \leq 1$ がなりたつ.

参考6 $C_o^{\infty,2}$ の任意の元 F および S_{g_F} の各元 θ_0 に対し $\Gamma_{F,o}(\theta_0) \leq \pi$ を示し, さらに $C_o^{(\infty,\infty)}$ の元 F' で $G_{F'}$ 上 o が孤立臍点であるものに対し $\text{ind}_o(G_{F'}) \leq 1$ を示すことができれば $\text{ind}_{p_0}(S) \leq 1$ を一般的に示すことができる.

S を滑らかな Weingarten 曲面とする. また w_S は滑らかな二変数関数で S の Gauss 曲率 K_S および平均曲率 H_S に対し $w_S(K_S, H_S) \equiv 0$ をみたすものとする.

定義7 Weingarten 曲面 S が 特別である とは w_S として次の条件をみたすものを見い出すことができるときにいう: Umb(S) の各点で

$$H_S \frac{\partial w_S}{\partial X}(K_S, H_S) + \frac{1}{2} \frac{\partial w_S}{\partial Y}(K_S, H_S) \neq 0 \quad (1)$$

がなりたつ.

参考8 S から \mathbb{R}^2 への写像 Φ_S を S の各点 p に対して

$$\Phi_S(p) := (K_S(p), H_S(p))$$

により定義する. このとき

$$\Phi_S(S) \subset \{X \leq Y^2\}, \quad \Phi_S(\text{Umb}(S)) \subset \{X = Y^2\}$$

がなりたつ. もし Umb(S) の元 p_0 で(1) がなりたつとすると, 方程式 $w_S = 0$ は $\Phi_S(p_0)$ を通る滑らかな曲線を定めることが陰関数定理を用いてわかり, さらに(1) からその曲線は $\Phi_S(p_0)$ で $\{X = Y^2\}$ に横断的に交わるということがわかる.

次の定理がなりたつ:

定理9 F は $C_o^{(\infty,2)}$ の元で G_F が特別な Weingarten 曲面であるものとする. このとき $S_{g_F} = \emptyset$, $F \in C_{oo}^{\infty,2}$ および $\text{ind}_o(G_F) = 1 - k_F/2$ がなりたつ.

参考10 $k_F \geq 3$ なので F が定理9におけるようなものであれば特に $\text{ind}_o(G_F) < 0$ がわかる. Hartman-Wintner は S が全臍的ならざる特別な Weingarten 曲面であるとき各臍点 p_0 は孤立していてかつその指数は負であることを示した ([2]).

参考11 特別な Weingarten 曲面の例として平均曲率一定曲面があげられる. S を平均曲率一定曲面とするとき Umb(S) は S 上の Hopf 微分 Ω_S の零点全体からなる集合として与えられる. Ω_S は等温座標系について正則なので S が全臍的でなければ各臍点 p_0 は孤立していることがわかる. p_0 での Ω_S の位数を $\text{ord}_{p_0}(S)$ とするとき p_0 の指数は $-\frac{\text{ord}_{p_0}(S)}{2}$ で与えられる ([3]).

参考文献

- [1] N.Ando, The index of an isolated umbilical point on a surface, preprint.
- [2] P.Hartman and A.Wintner, Umbilical points and W-surfaces, Amer. J. Math., 76(1954) 502-508.
- [3] H.Hopf, Lectures on differential geometry in the large, Lecture Notes in Math., vol.1000, Springer-Verlag.
- [4] T.Klotz, On Bol's proof of Carathéodory's conjecture, Comm. Pure Appl. Math., 12(1959) 277-311.
- [5] B.Smyth and F.Xavier, Real solvability of the equation $\partial_{\bar{z}}^2\omega = \rho g$ and the topology of isolated umbilics, J. Geom. Anal., 8(1998), 655-671.
- [6] C.J.Titus, A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points, Acta Math., 131(1973), 43-77.