測地線に近い曲線

榎本 一之

東京理科大学 基礎工学部

0. 序.

C を n 次元 Euclid 空間 E^n 内の無限に長い曲線とする. $x(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ を C の弧長による parameterization とする. C の曲率 $|d^2x/ds^2|$ を $k(s)$ と書く. いたるところで $k = 0$ であれば C は測地線 (直線) であるが, $s \to \infty$ のとき $k(s) \to 0$ であっても, C は直線とは全く異なる性質を持つこともあり得る. 例えば, Euclid 平面の極座標 (r, θ) を用いて $r = \theta$ によって表される曲線は $\lim_{s\to\infty} k(s) = 0$ をみたすが, どのような観点からも「直線に近い曲線」と見ることはできないであろう.

しかし, 曲率がもう少し速く 0 に近づくと, C の形が「直線に近い」と言えることがある. 例えば, C が properly immersed (すなわち, $s \to \infty$ のとき $|x(s) \to \infty$) であって, ある正の定数 ε に対して $|x(s)|^{1+\varepsilon}|k(s)|$ が C 上で一様に有界であるならば, C の接ベクトルは $s \to \infty$, $s \to -\infty$ のそれぞれにおいて, ある一定の方向に近づくし, さらに C が properly immersed であって, ある正の定数 ε に対して $|x(s)|^{2+\varepsilon}|k(s)|$ が C 上で一様に有界であるならば, C は $s \to \infty$, $s \to -\infty$ のそれぞれにおいて, ある直線を漸近線として持つ. (直線 $\ell : y(t)$ で $\lim\limits_{s\to\infty} \inf\limits_t |y(t) - x(s)| = 0$ を満たすものを $s \to \infty$ における漸近線と呼ぶ.) これらは [E2] の中で証明されていることから簡単に導かれる.

さて, properly immersed かつ, ある正の定数 ε に対して $|x(s)|^{2+\varepsilon}k(s)$ が C 上で一様に有界である曲線に対して

$$\int_C |x(s)|k(s)\,ds < \infty$$

が成り立つが, この条件に置き換えても C が漸近線を持つことを示すことができる.

定理 3.1. E^n 内の無限に長い曲線 $C : x(s)$ に対して $\displaystyle\int_C |x(s)|k(s)\,ds < \infty$ が成り立つとき, C は properly immersed であって, ある直線を漸近線として持つ.

(注) これは E^2 内の曲線に対する [E3] の結果の一般化である.

n 次元双曲空間 H^n 内の無限に長い曲線 C に対しては Euclid 空間におけるよりも弱い

$$\int_C k(s)\,ds < \infty$$

という条件のもとで漸近測地線の存在を証明することができる. ここで, 測地線 $\Gamma : y(t)$ が漸近測地線であるとは $s \to \pm\infty$ のとき $h(s) := \inf_t d(x(s), y(t))$ が 0 に近づくことを言う .

定理 2.1. H^n 内の無限に長い曲線 $C : x(s)$ に対して $\displaystyle\int_C k(s)\,ds < \infty$ が成り立つとき, C は properly immersed であって, ある測地線を漸近測地線として持つ.

1. 非正断面曲率を持つ Riemann 多様体内の曲線

M を断面曲率がいたるところで非正である単連結完備 Riemann 多様体とする. M 内の無限に長い曲線について次の定理が成り立つ.

定理 1.1. $C : x(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ を M 内の曲線とする. O を M 内の定点とし, $r(s) = d(O, x(s))$ とする. このとき $\int_{-\infty}^{\infty} k(s)\, ds < \infty$ であるならば

$$\lim_{s\to\pm\infty} \left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$$

が成り立つ. 特に,

$$\lim_{s\to\pm\infty} r(s) = \infty$$

が成り立ち, C は properly immersed である.

定理 1.1 の証明には次の Szentze による定理 ([S]) が重要な役割を果たす.

Szentze の定理 M 内の区分的 C^2 級の閉曲線 C に対して絶対全曲率は 2π 以上である. ここで, 絶対全曲率とは曲率 $k(s)$ の積分と外角の和を指す.

さて, γ_s を定点 O から曲線上の点 $x(s)$ へ向かう測地線とし, $X(s)$ を γ_s の O における単位接ベクトルとする. $X(s)$ を O における M の単位接ベクトル全体からなる $(n-1)$ 次元の単位球面内の曲線と考えるとき, 次の主張が成り立つ.

補題 1.2. M 内の曲線 C について $\int_{-\infty}^{\infty} k(s)\, ds < \infty$ であるとする. このとき, $s \to \pm\infty$ とすると $X(s)$ は収束する.

この証明にも Szentze の定理が用いられる.

2. 双曲空間内の曲線

§1 の結果を用いて H^n 内の無限に長い曲線に関する次の定理を証明することができる.

定理 2.1. H^n 内の無限に長い曲線 $C : x(s)$ に対して $\displaystyle\int_C k(s)\, ds < \infty$ が成り立つとき, C は properly immersed であって, ある測地線を漸近測地線として持つ.

証明. 補題 1.2 における $s \to \infty$ のときの $X(s)$ の極限を X_∞ とする. Γ を O において X_∞ に接する H^n の測地線とする. $y(s)$ を Γ 上の点で $d(O, y(s)) = r(s)$ をみたす点とする. $x(s)$ と $y(s)$ は曲線 $\{\exp_O(r(s)X(t)) : s \le t < \infty\}$, によって結ばれる. この曲線の長さを $\ell(s)$. とする. 単位球面内の曲線 $\{X(t) : s \le t < \infty\}$ の長さを $\tilde{\ell}(s)$ とする. これらの間には

$$\ell(s) = \sinh(r(s))\tilde{\ell}(s). \tag{2.1}$$

という関係がある. 定理 1.1 より $\lim_{s\to\infty} \frac{dr}{ds} = 1$ であるから,

$$\lim_{s\to\infty} \theta(s) = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ. ここで $\theta(s)$ は補題 1.2 で定義された角の大きさである.

さて, $d\tilde{s}$ を $X(t)$ の線素とすると

$$\sin\theta(s)\, ds = \sinh(r(s))\, d\tilde{s}. \tag{2.3}$$

が成り立つ．(2.2) と (2.3) より

$$\lim_{s\to\infty} \sinh(r(s))\frac{d\tilde{s}}{ds} = 0. \tag{2.4}$$

が得られる．

$$\lim_{s\to\infty} r(s) = \infty$$

であるから, l'Hospital の定理ならびに定理 1.1, (2.1), (2.4) より

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \ell(s) &= \lim_{s\to\infty} \frac{\tilde{\ell}(s)}{1/\sinh(r(s))} \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{d\tilde{s}}{ds}}{-\frac{dr}{ds}\cosh(r(s))/\sinh^2(r(s))} \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{\sinh(r(s))\frac{d\tilde{s}}{ds}}{-\frac{dr}{ds}\coth(r(s))} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．$d(x(s),\Gamma) \leq d(x(s),y(s)) \leq \ell(s)$ であるから (2.5) より

$$\lim_{s\to\infty} d(x(s),\Gamma) = 0$$

となる．従って Γ は $s\to\infty$ における C の漸近測地線である．同様に $s\to-\infty$ においても C の漸近測地線が存在することが証明される．

3. Euclid 空間内の曲線

例えば $y = x^2$ のグラフからもわかるように

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s)\,ds < \infty$$

という条件は Euclid 平面においては必ずしも漸近線の存在を意味しない．しかし, 次の定理で示されるようにこれよりも強い条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s)r(s)\,ds < \infty$$

のもとでは漸近線の存在を示すことができる．この定理は 2 次元 Euclid 空間においては [E3] で証明されている．

定理 3.1. $C : x(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ を n 次元 Euclid 空間 E^n の中の曲線とする．もし C が

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s)r(s)\,ds < \infty$$

をみたすならば C はそれぞれの end で漸近線を持つ．

Proof. C は Euclid 空間内の曲線であるから, C のある単位法線ベクトル $N(s)$ に対して

$$\frac{dx}{ds} = T(s), \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dT}{ds} = k(s)N(s),$$

が成り立つ.

$$x^{\perp}(s) = x(s) - \langle x(s), T(s)\rangle T(s)$$

とおく. $x^{\perp}(s)$ は曲線上の点の位置ベクトルの法線方向の成分である. 任意の正の数 ε に対して, ある $s_0 > 0$ が存在し, $s_1, s_2 \geq s_0$ であるすべての s_1, s_2 に対して

$$\int_{s_1}^{s_2} k(s)r(s)\,ds < \varepsilon$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{dx^{\perp}}{ds}\right|^2 &= \left|T - \langle T, T\rangle T - \langle x, \frac{dT}{ds}\rangle T - \langle x, T\rangle \frac{dT}{ds}\right|^2 \\
&= |-\langle x, kN\rangle T - \langle x, T\rangle kN|^2 \\
&= k^2(\langle x, N\rangle^2 + \langle x, T\rangle^2) \\
&\leq k(s)^2|x(s)|^2 \\
&= k(s)^2 r(s)^2
\end{aligned}$$

であるから, 次の評価が得られる.

$$\begin{aligned}
|x^{\perp}(s_2) - x^{\perp}(s_1)| &= \left|\int_{s_1}^{s_2} \frac{dx^{\perp}}{ds}\,ds\right| \\
&\leq \int_{s_1}^{s_2} \left|\frac{dx^{\perp}}{ds}\right| ds \\
&\leq \int_{s_1}^{s_2} k(s)r(s)\,ds \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

これより, $s \to \infty$ のとき $x^{\perp}(s)$ がある定ベクトル $x^{\perp}_{\infty}$ に収束することがわかる.

また, $s \to \infty$ のとき単位接線ベクトル $T(s)$ も定ベクトル T_{∞} に収束する. これは次の議論からわかる. 十分に大きい s_0 に対して $s \geq s_0$ ならば $r(s) > 1$ となり,

$$\begin{aligned}
|T(s_2) - T(s_1)| &= \left|\int_{s_1}^{s_2} \frac{dT}{ds}\,ds\right| \\
&\leq \int_{s_1}^{s_2} \left|\frac{dT}{ds}\right| ds \\
&= \int_{s_1}^{s_2} k(s)\,ds \\
&< \int_{s_1}^{s_2} k(s)r(s)\,ds \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ.

直線 $\Gamma : y(t)$ を

$$y(t) = x^{\perp}_{\infty} + tT_{\infty}$$

によって定義する．Γ 上の点 $\bar{x}(s)$ を

$$\bar{x}(s) = x_\infty^\perp + \langle x(s), T_\infty \rangle T_\infty$$

によって定義する．$x(s) = x^\perp(s) + \langle x(s), T(s) \rangle T(s)$ であるから，

$$\begin{aligned}
|x(s) - \bar{x}(s)| &= |(x^\perp(s) - x_\infty^\perp) + \langle x(s), T(s) \rangle T(s) - \langle x(s), T_\infty \rangle T_\infty| \\
&= |(x^\perp(s) - x_\infty^\perp) + \langle x(s), T(s) \rangle (T(s) - T_\infty) + \langle x(s), T(s) - T_\infty \rangle T_\infty| \\
&\leq |x^\perp(s) - x_\infty^\perp| + |\langle x(s), T(s) \rangle||T(s) - T_\infty| + |\langle x(s), T(s) - T_\infty \rangle| \\
&\leq |x^\perp(s) - x_\infty^\perp| + 2r(s)|T(s) - T_\infty|
\end{aligned}$$

が得られる．$\int_0^\infty k(s)r(s)\,ds$ が収束するから，任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\int_{s_0}^\infty k(s)r(s)\,ds < \varepsilon$$

となる s_0 が存在する．定理 1.1 よりすべての $s \geq s_0$ に対して $\frac{dr}{ds} > 0$ と仮定してよい．これより $t \geq s \geq s_0$ であるすべての t, s に対して $r(t) > r(s)$ が成り立つ．さて，任意の $s \geq s_0$ に対して

$$\begin{aligned}
r(s)|T(s) - T_\infty| &= r(s)\left|\int_s^\infty \frac{dT}{dt}dt\right| \\
&\leq r(s)\int_s^\infty \left|\frac{dT}{dt}\right| dt \\
&= r(s)\int_s^\infty k(t)\,dt \\
&\leq \int_s^\infty k(t)r(t)\,dt \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\lim_{s\to\infty} |x(s) - \bar{x}(s)| \leq \lim_{s\to\infty} (|x^\perp(s) - x_\infty^\perp| + 2r(s)|T(s) - T_\infty|) = 0$$

が得られ，Γ が C の $s \to \infty$ における漸近線であることが示される．同様にして C は $s \to -\infty$ においても漸近線を持つ．

参考文献

[E1] K. Enomoto, *Compactification of asymptotically umbilical hypersurfaces in hyperbolic space* , Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University Series A, Mathematics **46** (1992) 57–68

[E2] K. Enomoto, *Compactification of submanifolds in Euclidean space by the inversion* , Advanced Studies in Pure Mathematics **22** (K.Shiohama ed.) (1993), Kinokuniya Company, 1–11.

[E3] K. Enomoto, *Plane curves with asymptotic lines*, Kyushu J. Math. **49** (1995) 317–319.

[E4] K. Enomoto, *Curves with asymptotic geodesics*, Preprint.

[S] J. Szenthe, *On the total curvature of closed curves in Riemannian manifolds*, Publ. Math. Debrecen **15** (1968) 99–105.