複素射影空間上のキリングベクトル場の積分曲線について

前田定廣（島根大学総合理工学部）

1. Introduction と準備.

$\gamma = \gamma(s)$ (s:弧長) をリーマン多様体 M 上で $\underline{proper\ order}\ d$ の滑らかなフレネ曲線とする。即ち、γ に沿った正規直交標構 $\{V_1 = \dot{\gamma}, \dots, V_d\}$ と 正の 可微分関数 $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{d-1}(s)$ が存在して次の連立常微分方程式を満たす。

$$(1)\quad \nabla_{\dot{\gamma}} V_j(s) = -\kappa_{j-1}(s)V_{j-1}(s) + \kappa_j(s)V_{j+1}(s),\ 1 \leqq j \leqq d.$$

ここで、$V_0 \equiv V_{d+1} \equiv 0$ であり、$\nabla_{\dot{\gamma}}$ は M のリーマン接続 ∇ に関する γ に沿った共変微分とする。

曲線 $\gamma = \gamma(s)$ が $\underline{order}\ d$ のフレネ曲線とは、γ が proper order $r(\leqq d)$ のフレネ曲線のことをいう。proper order $r(\leqq d)$ である order d のフレネ曲線に対しては、式 (1) において、$\kappa_j \equiv 0\ (r \leqq j \leqq d-1),\ V_j \equiv 0\ (r+1 \leqq j \leqq d)$ と考えることにする。

本講演では、曲線といえば滑らかなフレネ曲線を意味する。曲線 γ のすべての曲率 $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ がそれぞれ定数であるとき、γ を**螺旋 (helix)** と呼ぶ。order 1 の螺旋は測地線そのものである。order 2 で曲率が $\kappa_1 = k$ である螺旋を曲率 k の**円 (circle)** という。

ここで、ケーラー多様体 $(M^n, J, \langle\ ,\ \rangle)$ 上で order $d(\leqq 2n)$ のフレネ曲線 γ を考えよう。$\{V_1, \dots, V_d\}$ を γ のフレネ標構とするとき、

$$\tau_{ij}(s) := \langle V_i(s), JV_j(s)\rangle,\ 1 \leqq i < j \leqq d$$

を γ の**複素れい率** (**complex torsions**) という。ケーラー多様体上の曲線を調べる際に複素れい率は重要な役目をもつ。そこで曲率や複素れい率がすべてそれぞれ定数であるような曲線を**複素螺旋** (**holomorphic helix**) とよぶことにする。

以後、非平坦な複素空間形 $M_n(c)(=\mathbb{C}P^n(c),\ \mathbb{C}H^n(c))$ 上の曲線について考察する。まず、複素空間形 $M_n(c), c \neq 0$ 上のフレネ曲線に関する合同定理を述べよう。

定理 **1.** $\gamma = \gamma(s),\ \delta = \delta(s)$ をそれぞれ次数 p, q の非平坦な複素空間形 $M_n(c)$ 上のフレネ曲線とする。$\{V_1, \dots, V_p\}$, $\{W_1, \dots, W_q\}$ をそれぞれ $\gamma,\ \delta$ のフレネ標構とし、$\{\lambda_1(s), \dots, \lambda_{p-1}(s)\},\ \{\mu_1(s), \dots, \mu_{q-1}(s)\}$ をそれぞれ $\gamma,\ \delta$ の曲率とする。

このとき、γ と δ が合同である (即ち、$\forall s$ に対して $\gamma(s) = (\varphi \circ \delta)(s + s_0)$ が成り立つような $M_n(c)$ の等長変換 φ と定数 s_0 が存在する) ための必要十分条件は、次の 2 条件が成り立つことである。

(1) $p = q$.
(2) $\forall s$ に対して、次の性質を持つ定数 s_0 が存在する。
　$i)$ $\lambda_i(s) = \mu_i(s + s_0)$ $(i = 1, \dots, p-1)$,
　$ii)$ γ と δ の複素れい率は次のどちらかを満たす。
　$\tau_\gamma^{ij}(0) = \tau_\delta^{ij}(s_0)$ $(1 \leqq i < j \leqq p)$ または、
　$\tau_\gamma^{ij}(0) = -\tau_\delta^{ij}(s_0)$ $(1 \leqq i < j \leqq p)$.

ここで、定理 1 の条件 (2)$ii)$ の前半の場合、γ と δ は $M_n(c)$ の正則等長変換に関して合同であり、定理 1 の条件 (2)$ii)$ の後半の場合、γ と δ は $M_n(c)$ の反正則等長変換に関して合同である。

「実空間形 $M^n(c)(= S^n(c), \mathbb{R}^n, H^n(c))$ では曲線 γ が螺旋であることと γ がキリングベクトル場の積分曲線であることは

互いに同値である」ことが知られている。次の定理はこれの complex version である。

定理２．複素空間形 $M_n(c)(=\mathbb{C}P^n(c), \mathbb{C}^n, \mathbb{C}H^n(c))$ では曲線 γ が複素螺旋であることと γ が複素キリングベクトル場の積分曲線であることは互いに同値である。

　非平坦な複素空間形 $M_n(c)(=\mathbb{C}P^n(c), \mathbb{C}H^n(c))$ では、任意のキリングベクトル場は複素キリングベクトル場であることが知られている。

全てのケーラー多様体 $(M, J, \langle\ ,\ \rangle)$ 上において、任意の円 γ は常に複素螺旋になる。実際、γ が満たす微分方程式を $\nabla_{\dot\gamma}V_1(s) = kV_2(s)$, $\nabla_{\dot\gamma}V_2(s) = -kV_1(s)$, $V_1(s) = \dot\gamma$ とすると、次の計算がそのことを示してくれる。

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\dot\gamma}\langle V_1(s), JV_2(s)\rangle &= \langle \nabla_{\dot\gamma}V_1(s), JV_2(s)\rangle + \langle V_1(s), J\nabla_{\dot\gamma}V_2(s)\rangle \\
&= k\cdot\langle V_2(s), JV_2(s)\rangle - k\cdot\langle V_1(s), JV_1(s)\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

以後、円 γ の（一つしかない）複素れい率 τ_{12} は、単に τ と書くことにしよう。

前述の計算で円（即ち、order 2 の螺旋）は常に複素螺旋になることが分かった。しかし次数が３以上の螺旋では複素螺旋にならないものが無数に存在する。

　例えば、γ をケーラー多様体 M 上の proper order 3 の螺旋とすると γ の複素れい率の満たすべき微分方程式は次のようになる。

$$
\begin{cases}
\tau_{12}' = \quad \kappa_2\tau_{13}, \\
\tau_{13}' = -\kappa_2\tau_{12} + \kappa_1\tau_{23}, \\
\tau_{23}' = \quad -\kappa_1\tau_{13},
\end{cases}
$$

ここで、κ_1, κ_2 は γ の曲率である。そこでこの連立常微分方程式を解くと適当な定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が存在して γ の複素れい率は

$$\begin{cases} \tau_{12}(s) = \alpha_1 \sin\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s + \alpha_2 \cos\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s + \alpha_3, \\ \tau_{13}(s) = \dfrac{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}{\kappa_2}\Big(\alpha_1 \cos\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s \\ \qquad\qquad - \alpha_2 \sin\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s\Big), \\ \tau_{23}(s) = -\dfrac{\kappa_1}{\kappa_2}\Big(\alpha_1 \sin\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2} + \alpha_2 \cos\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s\Big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}\alpha_3, \end{cases}$$

と書ける。これより γ が複素螺旋になるための必要十分条件は、$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ となる。

2. $\mathbb{C}P^n$ 内の部分多様体上の測地線になっているキリングベクトル場の積分曲線の例（その１）**.**

複素射影平面 $\mathbb{C}P^2(4)$ 内の２次元 flat torus を構成する。リーマン面 $N = (S^1 \times S^1)/\varphi$ を考える。ここで、最初の成分の S^1 は $S^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$ で、後半の成分の S^1 は $S^1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 |\ (a_1)^2 + (a_2)^2 = 1\}$ と表し、同一視 φ は $\varphi\Big((e^{i\theta}, (a_1, a_2))\Big) = (-e^{i\theta}, (-a_1, -a_2))$ と定義する。N 上のリーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle A + \xi, B + \eta \rangle = \frac{2}{9}\langle A, B\rangle_{S^1} + \frac{2}{3}\langle \xi, \eta\rangle_{S^1}$$

for $\forall A, B \in TS^1$ of the first component, $\forall \xi, \eta \in TS^1$ of the second component. ここで、$\langle\ ,\ \rangle_{S^1}$ は S^1 の通常の計量である。

等長埋蔵 $f: N \to \mathbb{C}P^2(4)$ を

$$(2)\ f(e^{i\theta},(a_1,a_2)) = \pi\Big(\frac{1}{3}(e^{-\frac{2i\theta}{3}}+2a_1e^{\frac{i\theta}{3}}),\frac{\sqrt{2}}{3}(e^{-\frac{2i\theta}{3}}-a_1e^{\frac{i\theta}{3}}),\frac{2}{\sqrt{6}}ia_2e^{\frac{i\theta}{3}}\Big).$$

と定義する。ここで、$\pi: S^5(1) \to \mathbb{C}P^2(4)$ は Hopf fibration である。

次の定理は、N 上の任意の測地線 γ に対して $f\circ\gamma$ は $\mathbb{C}P^2(4)$ 上の曲率 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円になり、しかも互いに合同でないものが沢山あることを教えてくれる。

定理３．任意の単位ベクトル $X=(\alpha u, v)\in T_x(N)$ に対して、γ_X を X 方向の N 上の測地線とするとき、$\mathbb{C}P^2(4)$ 上の曲線 $f\circ\gamma_X$ は単純曲線になり、しかも次の性質をもつ。

(1) $f\circ\gamma_X$ は曲率 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円である。

(2) $f\circ\gamma_X$ の複素れい率は、$4\alpha^3-3\alpha$ $(for\ -1\leqq\alpha\leqq 1)$ である。

(3) $f\circ\gamma_X$ が閉曲線であるための必要十分条件は、$\alpha=0$ または $\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{3\alpha^2}}$ が有理数になることである。

(4) $\alpha=0$ のときは、$f\circ\gamma_X$ は長さ $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ の閉曲線である。

(5) $\alpha\neq 0$ で $\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{3\alpha^2}}$ が有理数とする。$\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{3\alpha^2}} := \frac{p}{q}$（既約分数）と表すとき、閉曲線 $f\circ\gamma_X$ の長さ ℓ は次のようになる。

(5_i) 積 pq が偶数の場合は、ℓ は $\frac{2\sqrt{2}}{3|\alpha|}\pi$ と $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3(1-\alpha^2)}}\pi$ の最小公倍数である。特に $\alpha=\pm1$ のときは、$\ell=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ である。

(5_{ii}) 積 pq が奇数の場合は、ℓ は $\frac{\sqrt{2}}{3|\alpha|}\pi$ と $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3(1-\alpha^2)}}\pi$ の最小公倍数である。

そこで $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の任意の円について調べてみよう。その前に円に関する合同定理を作っておく。これは定理1の特別な場合である。

命題 **1.** $\gamma_i = \gamma_i(s)$ $(i = 1, 2)$ を非平坦な複素空間形 $M_n(c)(= \mathbb{C}P^n(c), \mathbb{C}H^n(c))$ 内の曲率 $k_i(>0)$、複素れい率 τ_i $(-1 \leqq \tau_i \leqq 1)$ の円とするとき、この2つの円が $M_n(c)$ の等長変換に関して合同であるための必要十分条件は、$k_1 = k_2$ かつ $|\tau_1| = |\tau_2|$ である。

ケーラー多様体 M 上で $\tau = \pm 1$ となる円を holomorphic circle(正則円)、$\tau = 0$ である円を totally real circle(全実円)と呼ぶことにしよう。

$-1 \leqq \alpha \leqq 1$ に対して $-1 \leqq 4\alpha^3 - 3\alpha \leqq 1$ となるから、前述の定理3より $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の曲率 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の任意の円は $\mathbb{C}P^2(4)$ 上の曲率 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の適当な円 $f \circ \gamma_X$ と合同であることが分かる。

$\mathbb{C}P^n(4)$ 内の任意の円について次の定理が成り立つ。

定理4**.** $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の曲率 $\kappa(>0)$、複素れい率 τ の円 γ は、全測地的ケーラー部分多様体 $\mathbb{C}P^2(4)$ 上の円になる。しかも次の性質をもつ。

(1) $\tau = 0$ のとき、γ は長さ $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2+1}}$ の単純閉曲線である。
(2) $\tau = \pm 1$ のとき、γ は長さ $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2+4}}$ の単純閉曲線である。
(3) $\tau \neq 0, \pm 1$ のとき、a, b, d $(a < b < d)$ を3次方程式 $\lambda^3 - (\kappa^2 + 1)\lambda + \kappa\tau = 0$ の3つの異なる実数解とする。このとき次が成り立つ。

(3_i) 3つの比 $\frac{a}{b}, \frac{b}{d}, \frac{d}{a}$ の中の一つが有理数であれば、γ は単純閉曲線である。その長さは $\frac{2\pi}{b-a}$ と $\frac{2\pi}{d-a}$ の最小公倍数である。

(3_{ii}) 3つの比 $\frac{a}{b}, \frac{b}{d}, \frac{d}{a}$ が全て無理数であれば、γ は単純開曲線である。

これからこの定理4を使って、$\mathbb{C}P^n(4)$ 内の円の length spectrum を調べよう。そのためにここで、記号を準備しよう。

M をリーマン多様体とするとき、$\mathrm{Cir}(M)$ を M の全ての円からなる集合を M の等長変換群 $\mathrm{I}(M)$ で割った商空間とする。M 上の円の length spectrum を写像 $\mathcal{CL} : \mathrm{Cir}(M) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{CL}([\gamma]) = \mathrm{length}(\gamma)$ で定義する。勿論 γ が open circle の場合は、$\mathrm{length}(\gamma) = \infty$ と考えることにする。また、数直線上の部分集合 $\mathrm{CLSpec}(M) := \mathcal{CL}(\mathrm{Cir}(M)) \cap \mathbb{R}$ も M 上の円の length spectrum と呼ぶことにする。

$\lambda \in \mathrm{CLSpec}(M)$ に対して、集合 $\mathcal{CL}^{-1}(\lambda)$ の濃度 $m_c(\lambda)$ を円の length spectrum $\mathcal{CL}$ の λ における重複度と呼ぶ。$m_c(\lambda) = 1$ であるとき、λ を**単純 (simple)** という。$m_c(\lambda) > 1$ となる $\lambda \in \mathrm{CLSpec}(M)$ がもし存在すれば、共通の長さ λ を持つが互いに合同でない M 上の円が存在することになる。

$\mathrm{Cir}_\kappa(M)$ を M 上の曲率 κ の円の（$\mathrm{I}(M)$ に関する）合同類全体、写像 $\mathcal{CL}_\kappa : \mathrm{Cir}_\kappa(M) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を $\mathcal{CL}$ の Cir_κ 上への制限と約束する。

M を特にケーラー多様体とするとき、$\mathrm{Cir}^\tau(M)$ を M 上の複素れい率 τ の円の（$\mathrm{I}(M)$ に関する）合同類全体、写像 $\mathcal{CL}^\tau : \mathrm{Cir}^\tau(M) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を $\mathcal{CL}$ の Cir^τ 上への制限と約束する。

複素射影空間上の円の length spectrum について次の定理が成り立つ。

定理５．$\mathbb{C}P^n(4)$ $(n \geqq 2)$ 上の円の *length spectrum* は次の性質をもつ。

(1) 任意の $\kappa(>0)$ と τ $(0<\tau<1)$ に対して、次の２つの集合は数直線上の非有界な離散集合である。

$$\mathrm{CLSpec}_\kappa(\mathbb{C}P^n(4)) = \mathcal{CL}(\mathrm{Cir}_\kappa(\mathbb{C}P^n(4))) \cap \mathbb{R},$$

$$\mathrm{CLSpec}^\tau(\mathbb{C}P^n(4)) = \mathcal{CL}(\mathrm{Cir}^\tau(\mathbb{C}P^n(4))) \cap \mathbb{R}.$$

(2) $\mathrm{CLSpec}(\mathbb{C}P^n(4))$ は半直線 $(0,\infty)$ と一致する。

(3) 任意の $\kappa(>0)$ に対して、$\mathrm{CLSpec}_\kappa(\mathbb{C}P^n(4))$ の最小元は $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2+4}}$ であり、これは曲率 κ をもつ正則円の長さである。$\mathrm{CLSpec}_\kappa(\mathbb{C}P^n(4))$ の２番目に小さい元は $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2+1}}$ であり、これは曲率 κ をもつ全実円の長さである。これらの長さは $\mathcal{CL}_\kappa$ に関して単純である。

(4) 任意の $\lambda(\in \mathbb{R})$ において、$\mathcal{CL}$ の重複度 $m_c := \sharp(\mathcal{CL}^{-1}(\lambda))$ は有限である。しかし、一様有界ではない。特に次が成り立つ。

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{m_c(\lambda)}{\lambda^2 \log \lambda} = \frac{9}{2\pi^4}.$$

(5) $\mathcal{CL}$ に関して $\lambda(\in \mathbb{R})$ が単純であるための必要十分条件は、$\lambda \in \left(\pi, \frac{2\sqrt{5}}{3}\pi\right]$ である。

(6) $\mathcal{CL}_\kappa$ $(\kappa>0)$ の重複度 $m_c^\kappa := \sharp(\mathcal{CL}_\kappa^{-1}(\lambda))$ も $m_c(\lambda)$ と同様に任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、有限であるが一様有界ではない。しかし、この増大度は $m_c(\lambda)$ と違ってそれ程大きくない。実際、任意の正数 δ に対して $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\delta}\sharp(\mathcal{CL}_\kappa^{-1}(\lambda)) = 0$ となる。即ち、増大度は任意の多項式の増大度より小さい。

注意１．この定理５の主張 (6) は $\mathbb{C}P^n$ では共通の曲率をもち、共通の長さをもっても互いに（$\mathbb{C}P^n$ の等長変換に関して）合同にならない閉じた円がいくらでもあることを我々に教えてくれる。例えば、γ_1 を $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tau = \frac{5698}{559\sqrt{559}}$ の円、γ_2 を $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tau = \frac{12502}{559\sqrt{559}}$ の円とすると同じ曲率をもつこの２つの円は、共通の長さ $\frac{2\sqrt{1118}}{3}\pi$ を持つ閉曲線になるが互いに合同ではない。

注意２．定理５の主張 (2), (5) より次の系が従う。

系．任意の正数 ℓ に対して ℓ を長さにもつ $\mathbb{C}P^n$ 上の円の ($\mathbb{C}P^n$ の等長変換に関する）合同類は必ず存在する。この合同類が一意的に存在するための必要十分条件は、ℓ が $\pi < \ell \leqq \frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ を満たすことである。

注意３．定理５の主張 (6) に関連して曲率 κ、長さが λ 以下の閉じた円の合同類の個数、即ち

$$n_c(\lambda;\kappa) = \sharp\{[\gamma] \in \mathrm{Cir}_\kappa(M) | \mathrm{length}(\gamma) \leqq \lambda\}$$

を考える。次の定理はこの $n_c(\lambda;\kappa)$ が漸近的にある２次式で近似されることを示している。

定理６．$\mathbb{C}P^n(4)$ において任意の $\kappa(>0)$ に対して次が成立する

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{n_c(\lambda;\kappa)}{\lambda^2} = \frac{3\sqrt{3}(\kappa^2+1)}{2\pi^4} \tan^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}\alpha_\kappa}\Big),$$

ここで $\alpha_\kappa(\geqq 1)$ は

$$\frac{3\sqrt{3}\kappa}{2(\kappa^2+1)^{3/2}} = \frac{9\alpha_\kappa^2 - 1}{(3\alpha_\kappa^2+1)^{3/2}}$$

を満たす定数である。特に

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{n_c\Big(\lambda;\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)}{\lambda^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8\pi^3}$$

が成り立つ。

3. $\mathbb{C}P^n$ **内の部分多様体上の測地線になっているキリングベクトル場の積分曲線の例（その２）.**

ここでは $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の部分多様体 M として $M=G_m(r)$ $(0<r<\frac{\pi}{2})$ 即ち、点 $m\in\mathbb{C}P^n$ を中心とする半径 r の測地球面 (geodesic sphere) を考える。この測地球面 M は Riemann 幾何的に良い example として知られている。

例えば、任意の半径 r $(0<r<\frac{\pi}{2})$ に対して M は標準的球面に（等長同型ではないが）微分同型な Riemann 等質空間である。特に、$\tan^2 r>2$ のとき、M は Berger 球面になっている。即ち、M の断面曲率は区間 $[\delta K,K]$ (for some $\delta\in(0,\frac{1}{9})$) にあり、しかも M は長さが $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ より短い閉測地線を持っている。

また、部分多様体論の立場から見てもこれらすべての測地球面 M は、$\mathbb{C}P^n$ 内の興味ある submanifold になっている。M は $\mathbb{C}P^n$ において異なる２種類の主曲率を持ち、しかもそれぞれ一定な実超曲面である。ちなみに複素射影空間は totally umbilic な実超曲面を許容しない。更に $\mathbb{C}P^n$ $(n\geqq 3)$ においては、測地球面 M は各点で高々２種類の異なる主曲率を持つ唯一の実超曲面であることが知られている。

本節の目的は、複素射影空間内のすべての測地球面の測地線を考察し、その Length spectrum を詳細に調べることにある。

結果

まず、$\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r $(0 < r < \frac{\pi}{2})$ の測地球面 M は、$\mathbb{C}P^n$ 内の complex hyperplane $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の半径 $\frac{\pi}{2}-r$ の tube と合同であることに注意しよう。この実超曲面 M に $\mathbb{C}P^n$ の複素構造 J から induce される almost contact metric structure を $(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ とする。

測地球面の測地線を ambient space $\mathbb{C}P^n$ から観測することにより、次の特徴付けが得られる。

命題２．M^{2n-1} を $\mathbb{C}P^n$ 内の実超曲面とする。このとき、M が半径 r $(0 < r < \frac{\pi}{2})$ の測地球面であるための必要十分条件は、M 上の各点 p において次の条件を満たす $T_p(M)$ の正規直交系 $v_1, \cdots, v_{2n-2}$ $(\perp \xi)$ が存在することである : 点 p を通り $v_i + v_j$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq 2n-2)$ 方向の初期ベクトルを持つ M 上の測地線はすべて $\mathbb{C}P^n$ 内の曲率正の円である。

この命題に現れる測地線はすべて closed であり、接線ベクトルは M の各点において主曲率ベクトルになっている。そこで測地球面 M の測地線で接線方向が主曲率方向でない測地線が問題になる。

測地球面 M が持っている次の性質を使って M 上の測地線を調べることにする:

M を $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r の測地球面とすると M の $\mathbb{C}P^n(4)$ における shape operator A は次を満たす。

i) $A\xi = (2\cot 2r)\xi, \quad Au = (\cot r)u \quad \text{for } \forall u \in TM.$

ii) ϕ を M の構造テンソルとすると $\phi A = A\phi$.

iii) $(\nabla_X A)Y = -\{\langle \phi X, Y\rangle \xi + \eta(Y)\phi X\}$.
ここで、∇ は M のリーマン接続であり、$X, Y \in TM$.

これらを使うと直接計算より次のことがわかる。

命題３．$\mathbb{C}P^n$ 内の測地球面 M 上のすべての測地線 γ は、複素２次元 *complex linear subspace* $\mathbb{C}P^2$ 上のキリングベクトル場によって生成されている。よって、特に M 上の任意の測地線 γ は単純曲線でしかも $\gamma \subset \mathbb{C}P^2$ となる。

ここで、$\langle \dot\gamma(s), \xi \rangle$ が γ 上一定であることを示そう:

$$\nabla_{\dot\gamma} \langle \dot\gamma(s), \xi \rangle = \langle \dot\gamma(s), \phi A \dot\gamma \rangle = \langle \dot\gamma, A\phi\dot\gamma \rangle = -\langle \phi A \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = 0.$$

この定数 $\langle \dot\gamma(s), \xi \rangle$ を γ の**構造れい率** (**structure torsion**) と言い、$\sin\theta$ $(0 \leqq |\theta| \leqq \frac{\pi}{2})$ と表すことにする。

複素射影空間内の測地球面上の測地線に関する合同定理は次のようになる。

命題４．$\mathbb{C}P^n$ 内の測地球面 M 上の２本の測地線が M の等長変換に関して互いに合同であるための必要十分条件は、それらの構造れい率の絶対値が相等しいことである。

次の結果を得る。

定理７．γ を $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r $(0 < r < \frac{\pi}{2})$ の測地球面 M 上の測地線とするとき、次のことが成り立つ。

(1) γ の構造れい率が ± 1 であれば、γ は閉曲線であり長さは $\pi \sin 2r$ である。
(2) γ の構造れい率が零である場合も γ は閉曲線であり長さは $2\pi \sin r$ である。
(3) γ の構造れい率が $\sin\theta$ $(0 < |\theta| < \frac{\pi}{2})$ の場合は、γ が閉曲線であるための必要十分条件は

$$\sin\theta = \frac{\pm q}{\sin r \sqrt{p^2 \tan^2 r + q^2}}$$

と書けることである。ここで、$p,\ q$ は $q < p\tan^2 r$ を満たす適当な自然数である。このとき、閉曲線 γ の長さは次のようになる。

$$\mathrm{length}(\gamma) = \begin{cases} 2\pi\sqrt{p^2\sin^2 r + q^2\cos^2 r}, & \text{積}pq\text{が偶数、} \\ \pi\sqrt{p^2\sin^2 r + q^2\cos^2 r}, & \text{積}pq\text{が奇数。} \end{cases}$$

リーマン多様体 N の測地線の length spectrum を調べる際には、N の等長変換群 $I(N)$ の影響を考慮して N の測地線全体の $I(N)$ を法とする商空間 $Geod(N)$ を考察の対象とする。$\mathcal{L}_N([\gamma]) = \mathrm{length}(\gamma)$ によって定義される写像 $\mathcal{L}_N : \mathrm{Geod}(N) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を N の *length spectrum* と呼ぶ。ここで、$[\gamma]$ は測地線 γ が属する同値類を表す。

また、像 $\mathrm{LSpec}(N) = \mathcal{L}_N(\mathrm{Geod}(N)) \cap \mathbb{R}$ も N の legth spectrum と呼ぶことにする。例えば、単位球面の length spectrum は $\mathrm{LSpec}(S^m(1)) = \{2\pi\}$ となる。

定理 7 より $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r の測地球面 M の length spectrum $\mathrm{LSpec}(M)$ は数直線上の次のような集合として表示される:

$$\begin{aligned} &\mathrm{LSpec}(M) = \{\pi\sin 2r\} \bigcup \{2\pi\sin r\} \\ &\bigcup \left\{ 2\pi\sqrt{p^2\sin^2 r + q^2\cos^2 r} \;\middle|\; \begin{array}{c} p,\ q \text{ は互いに素な} \\ \text{自然数で積 } pq \text{ は} \\ \text{偶数で } q < p\tan^2 r \end{array} \right\} \\ &\bigcup \left\{ \pi\sqrt{p^2\sin^2 r + q^2\cos^2 r} \;\middle|\; \begin{array}{c} p,\ q \text{ は互いに素な} \\ \text{自然数で積 } pq \text{ は} \\ \text{奇数で } q < p\tan^2 r \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

これより次の結果を得る。

定理８．$\mathbb{C}P^n$ 内の測地球面 M は、可算無限個の閉測地線（の合同類）をもつ。その上 $\mathrm{LSpec}(M)$ は、数直線上の非有界な離散集合である。

元 $\lambda \in \mathrm{LSpec}(N)$ に対して、集合 $\mathcal{L}_N^{-1}(\lambda)$ の濃度を $m_N(\lambda)$ と書き、λ の重複度という。$m_N(\lambda) = 1$ のとき、λ を**単純** (**simple**) という。

M を $\mathbb{C}P^n$ 内の測地球面とすると前述の $\mathrm{LSpec}(M)$ の表示より $\forall\lambda \in \mathrm{LSpec}(M)$ に対して $m_M(\lambda) < \infty$ であることがわかる。ここで、この length spectrum の最小元、２番目に小さい元、３番目に小さい元を調べてみよう。

命題５．M を $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r $(0 < r < \frac{\pi}{2})$ の測地球面とすると次のことが成り立つ：

(1) $\mathrm{LSpec}(M)$ の最小元は $\pi \sin 2r$ で、これは構造れい率が ± 1 の測地線の長さであり、しかも単純（即ち重複度１）である。

(2) $\mathrm{LSpec}(M)$ の２番目に小さい元も単純である。$0 < r \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき、この元は $2\pi \sin r$ でありそれは構造れい率が零の測地線の長さである。$\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ のときは、２番目に小さい元は π でありそれは構造れい率が $\pm \cot r$ の測地線の長さである。

(3) $\mathrm{LSpec}(M)$ の３番目に小さい元も同様に単純である。$\frac{\pi}{4} < r < \frac{\pi}{2}$ のときは、３番目に小さい元は $2\pi \sin r$ でありそれは構造れい率が零の測地線の長さである。$\sqrt{2m-1} \leq \cot r < \sqrt{2m+1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ のとき、即ち $0 < r \leqq \frac{\pi}{4}$ を満たすときは、３番目に小さい元は $\pi\sqrt{4m(m+1)\sin^2 r + 1}$ でありそれは構造れい率

が $\pm 1/(\sin r\sqrt{(2m+1)^2\tan^2 r+1})$ の測地線の長さである。

$\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r の測地球面 M の断面曲率 K は $\cot^2 r \leqq K \leqq 4+\cot^2 r$ を満たす。故に $\tan^2 r > 2$ とすると $\delta(4+\cot^2 r) \leqq K \leqq 4+\cot^2 r$ を満たす適当な $\delta \in (0, \frac{1}{9})$ が存在する。しかも $\mathrm{LSpec}(M)$ の最小元は $\frac{2\pi}{\sqrt{4+\cot^2 r}}$ より小さい。よって、良く知られているように $\tan^2 r > 2$ を満たす ($\mathbb{C}P^n(4)$ 内の) 半径 r の測地球面 M は確かに Berger 球面になっている。

しかし、$\mathrm{LSpec}(M)$ の最小元以外の元に対しては、今までの結果より次のような Klingenberg 型の定理が成り立つことがわかる。

系. γ を $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r $(0<r<\frac{\pi}{2})$ の測地球面 M 上の測地線とする。このとき γ の構造れい率が ± 1 でなければ、γ の長さは $\mathrm{length}(\gamma) > \frac{2\pi}{\sqrt{4+\cot^2 r}}$ を満たす。

　length spectrum は一般に必ずしも単純ではない。即ち、単純ではない元を持っている。例えば、M を $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 $\frac{\pi}{4}$ の測地球面とすると $\mathrm{LSpec}(M)$ の最初の部分は次のようになる:

$$\mathrm{LSpec}(M) = \Big\{\pi, \sqrt{2}\pi, \sqrt{10}\pi, 2\sqrt{5}\pi, \sqrt{26}\pi, \sqrt{34}\pi, \sqrt{50}\pi, 2\sqrt{13}\pi, \sqrt{58}\pi, 2\sqrt{17}\pi, \sqrt{74}\pi, \sqrt{82}\pi, 10\pi, \sqrt{106}\pi, 2\sqrt{29}\pi, \sqrt{130}\pi, \ldots\Big\}$$

１番目の元 π から１５番目の元 $2\sqrt{29}\pi$ に至るまですべてそれぞれ単純である。１６番目に初めて単純でない元 $\sqrt{130}\pi$ が

現れる。この元の重複度は２でありそれは構造れい率が $\frac{3}{\sqrt{65}}$ と $\frac{7}{\sqrt{65}}$ の２本の閉測地線の共通の長さである。

次の結果が本節の主定理である。

定理９．M を $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r $(0 < r < \frac{\pi}{2})$ の測地球面とするとき、M の *length spectrum* に関して次のことが成り立つ。

(1) $\tan^2 r$ が無理数のときは、$\mathrm{LSpec}(M)$ のすべての元は単純である。

(2) $\tan^2 r$ が有理数のときは、 $\mathrm{LSpec}(M)$ のすべての元 λ の重複度 $m_M(\lambda)$ は有限である。しかし一様有界ではない。即ち、$\limsup_{\lambda\to\infty} m_M(\lambda) = \infty$ が成り立つ。この場合、重複度の増大度はそれほど大きくない。任意の正数 δ に対して、$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\delta} m_M(\lambda) = 0$ が成り立つ。

この定理は $\mathbb{C}P^n(4)$ 内の $\tan^2 r$ が無理数になる半径 r の測地球面 M では、２本の閉測地線が (M の等長変換に関して) 合同であることと共通の長さを持つことは同値であることを示している。他方、$\tan^2 r$ が有理数になる半径 r の測地球面 M では、測地線は長さだけでは合同かどうか識別できないことも我々に教えてくれる。

ここで「 λ を十分大きい正数とするとき、$\mathbb{C}P^n(4)$ 内の測地球面は長さが λ 以下の閉測地線（の合同類）を何本もつか？」ということを考えてみよう。

そこでリーマン多様体 N に対して、

$$n_N(\lambda) := \sharp\{[\gamma] \in \mathrm{Geod}(N) \mid \mathcal{L}_N([\gamma]) \leqq \lambda\}$$

を定義すると次の結果を得る。

定理１０．$\mathbb{C}P^n(4)$ 内の半径 r $(0 < r < \frac{\pi}{2})$ の測地球面 M に対して次の式が成り立つ。

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{n_M(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{3r}{\pi^4 \sin 2r}.$$

4. $\mathbb{C}P^2$ **内の複素螺旋の分類.**

section 2 における議論で $\mathbb{C}P^n$ 内の円は $\mathbb{C}P^2$ 上の複素螺旋になることが分かった。また section 3 で $\mathbb{C}P^n$ 内の測地球面 $G_m(r)$ 上の測地線も $\mathbb{C}P^2$ 上の複素螺旋になることが分かった。

そこで本節では $\mathbb{C}P^2$ 内の複素螺旋を分類することを目的としよう。proper order 3 及び proper order 4 の複素螺旋の分類問題だけがここでの essential な問題である。

何故なら $\mathbb{C}P^n$ 内の proper order 1 の複素螺旋は測地線そのものであるし、proper order 2 の複素螺旋即ち、曲率正の円の moduli 空間は命題１より直積集合 $(0,\infty)\times[0,1]$ であることが既に分かっている。

複素空間形 $M_n(c)(=\mathbb{C}P^n(c), \mathbb{C}^n, \mathbb{C}H^n(c))$ 内の proper order 3 の複素螺旋の分類は次の２つの定理で完全に分かる。

定理１１．$M_2(c)(=\mathbb{C}P^2(c), \mathbb{C}^2, \mathbb{C}H^2(c))$ 内の *proper order* 3 の複素螺旋 $\gamma = \gamma(s)$ の複素れい率は次を満たす。

$$\tau_{12} = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}, \tau_{13} = 0, \tau_{23} = \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}} \tag{11.1}$$

または

$$\tau_{12} = -\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}, \tau_{13} = 0, \tau_{23} = -\frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}. \tag{11.2}$$

ここで κ_i $(i=1,2)$ は γ の第 i 曲率である。

逆に任意の正数 κ_1,κ_2 に対してそれらを曲率にもつ $M_2(c)$ 内の *proper order* 3 の複素螺旋 γ は存在する。しかもその γ の複素れい率は (11.1) または (11.2) を満たす。

定理１２．$M_n(c)(=\mathbb{C}P^n(c),\mathbb{C}^n,\mathbb{C}H^n(c))$, $n\geqq 3$ 内の *proper order* 3 の複素螺旋 $\gamma=\gamma(s)$ の複素れい率は次を満たす。

$$\kappa_1\tau_{23}=\kappa_2\tau_{12},\tau_{13}=0,|\tau_{12}|\leqq\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}.$$

ここで κ_i $(i=1,2)$ は γ の第 i 曲率である。

逆に任意の正数 κ_1,κ_2 と $|\tau_{12}|\leqq\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}$ を満たす定数 τ に対して κ_i $(i=1,2)$ を第 i 曲率、$\tau_{12}=\tau$ とする $M_n(c)$ 内の *proper order* 3 の複素螺旋 γ が $M_n(c)$ の正則等長変換に関して一意的に存在する。

$|\tau|>\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}$ の場合はそのような *proper order* 3 の複素螺旋は存在しない。

定理１３．２次元複素空間形 $M_2(c)(=\mathbb{C}P^2(c),\mathbb{C}^2,\mathbb{C}H^2(c))$ 内の正数 κ_i $(i=1,2,3)$ を 第 i 曲率にもつ *proper order* 4 の複素螺旋 $\gamma=\gamma(s)$ の複素れい率は次のどれかを満たす。

$$\tau_{12}=\tau_{34}=\tau,\tau_{23}=\tau_{14}=\frac{\kappa_2\tau}{\kappa_1+\kappa_3},\tau_{13}=\tau_{24}=0. \tag{13.1}$$

ここで $\tau=\pm\frac{\kappa_1+\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2^2+(\kappa_1+\kappa_3)^2}}$ である。

$$\begin{aligned}\tau_{12}=-\tau_{34}=\tau,\tau_{23}=-\tau_{14}=\frac{\kappa_2\tau}{\kappa_1-\kappa_3},\\ \tau_{13}=\tau_{24}=0.\end{aligned} \tag{13.2}$$

ここで $\kappa_1 \neq \kappa_3$, $\tau = \pm\frac{\kappa_1-\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2^2+(\kappa_1-\kappa_3)^2}}$ である。

$$(13.2') \qquad \tau_{12} = \tau_{34} = \tau_{13} = \tau_{24} = 0, \tau_{23} = -\tau_{14} = \pm 1.$$

ここで $\kappa_1 = \kappa_3$ である。

逆に任意の正数 κ_i $(i = 1, 2, 3)$ に対してそれらを第 i 曲率にもつ $M_2(c)$ 内の *proper order* 4 の複素螺旋 γ は、$M_2(c)$ の正則等長変換に関して 4 本存在する。しかもこの複素螺旋 γ の複素れい率は $(13, 1)$, (13.2) または $(13, 1)$, $(13.2')$ を満たす。

5. $\mathbb{C}P^2$ 内の自己交差する閉螺旋の構成.

今までは $\mathbb{C}P^2$ 内のキリングベクトル場の積分曲線を考えてきた。それらは必ずしも閉曲線とは限らないが、単純な（即ち、自己交差しない）螺旋であった。そこで本節では複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ 内で次の性質をもつ曲線族を構成しよう。

- (i) 螺旋ではあるが、キリングベクトル場の積分曲線ではない。
- (ii) 閉曲線である。
- (iii) 単純曲線ではない。即ち、自己交差する曲線である。

このために section 2 の等長埋蔵 $f : N = (S^1 \times S^1)/\varphi \to \mathbb{C}P^2(4)$ を再度使用する。section 2 の議論より γ を N 上の測地線とすると曲線 $f \circ \gamma$ は $\mathbb{C}P^2$ 内のキリングベクトル場の積分曲線、特に円になっていた。

そこで γ として N 上の曲率 $k(>0)$ の円を考えると次の命題が成立する。

命題6．$N=(S^1\times S^1)/\varphi$ 上の曲率 $k(>0)$ の円 γ に対して、曲線 $f(\gamma)$ は $\mathbb{C}P^2$ 内の *order* 4 の螺旋になる。しかも特に次が成り立つ。

(1) $k=\frac{1}{2}$ のとき、曲線 $f\circ\gamma$ は曲率 $\kappa_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \kappa_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$ をもつ *proper order* 3 の螺旋である。

(2) $k\neq\frac{1}{2}$ のとき、曲線 $f\circ\gamma$ は曲率 $\kappa_1=\sqrt{k^2+\frac{1}{2}},\ \kappa_2=\frac{3k}{\sqrt{2k^2+1}},\ \kappa_3=\frac{|4k^2-1|}{\sqrt{2(2k^2+1)}}$ をもつ *proper order* 4 の螺旋である。

次に $f\circ\gamma$ の $\mathbb{C}P^2$ における複素れい率を求めよう。γ が満たしている微分方程式を

$$\nabla_X X=kY,\ \nabla_X Y=-kX,\ X=V_1=\dot{\gamma}$$

とおく。ここで γ に沿った正規直交系 $\{X,Y\}$ を各点 $\gamma(s)$ において次のように表す。

$$\begin{cases} X=\cos\psi\cdot(u,0)+\sin\psi\cdot(0,w), \\ Y=-\sin\psi\cdot(u,0)+\cos\psi\cdot(0,w)\ (0\leqq\psi<2\pi). \end{cases}$$

ここで $w\in TS^1(1)$ は第二成分の単位接ベクトルで、u は $\partial/\partial\theta$ を正規化したベクトルである。

次の結果より曲線 $f\circ\gamma$ は $\mathbb{C}P^2$ 上のキリングベクトル場の積分曲線ではないことが分かる。

命題7．γ を $N=(S^1\times S^1)/\varphi$ 上の曲率 $k(>0)$ の円とするとき、曲線 $f\circ\gamma$ の複素れい率 $\tau_{ij}(s)=\langle V_i(s),JV_j(s)\rangle$ $(1\leqq$

$i < j \leqq 4)$ は次のようになる。

(1) $k > \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{cases} \tau_{12} = \tau_{34} = \dfrac{1}{\sqrt{2k^2+1}} \cos 3(ks+\psi_0), \\ \tau_{13} = -\tau_{24} = -\sin 3(ks+\psi_0), \\ \tau_{14} = \tau_{23} = -\dfrac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2k^2+1}} \cos 3(ks+\psi_0). \end{cases}$$

(2) $k = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{cases} \tau_{12} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \cos 3\Big(\dfrac{1}{2}s+\psi_0\Big), \\ \tau_{13} = -\sin 3\Big(\dfrac{1}{2}s+\psi_0\Big), \\ \tau_{23} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos 3\Big(\dfrac{1}{2}s+\psi_0\Big). \end{cases}$$

(3) $k < \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{cases} \tau_{12} = -\tau_{34} = \dfrac{1}{\sqrt{2k^2+1}} \cos 3(ks+\psi_0), \\ \tau_{13} = \tau_{24} = -\sin 3(ks+\psi_0), \\ \tau_{14} = -\tau_{23} = -\dfrac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2k^2+1}} \cos 3(ks+\psi_0). \end{cases}$$

ここで、ψ_0 は γ の初期接ベクトル $\dot{\gamma}(0)$ と N の第一成分の単位接ベクトル u の成す角度である。

$\tilde{\gamma}$ を（N 上の曲率 k の円）γ の $\mathbb{R}^2$ における covering circle とすると $\tilde{\gamma}$ は半径 $\frac{1}{k}$ の円（故に長さ $\frac{2\pi}{k}$ の閉じた円）である

ことに注意しよう。基本領域で作図することにより $k \leqq \frac{3}{\sqrt{2}\pi}$ のとき、この閉じた円 γ は自己交差することが分かる。

よって今までの議論より次の定理を得る。

定理 **14.** $f : N \to \mathbb{C}P^2(4)$ を *section* 2 の (2) で定義された等長埋蔵、γ を N 上の曲率 $k(>0)$ の円とするとき、次が成り立つ。

(1) 曲線 $f \circ \gamma$ は $\mathbb{C}P^2$ 内の長さ $\frac{2\pi}{k}$ の閉じた螺旋であるが、キリングベクトル場の積分曲線ではない。

(2) $f \circ \gamma$ が自己交差するための必要十分条件は、$k \leqq \frac{3}{\sqrt{2}\pi}$ である。自己交差する点の個数は 3 以上である。