複素射影空間内の実部分多様体
の積分幾何学

田崎博之

湯沢 2000 年 11 月 23 日–25 日

1　導入

昨年 (1999 年) の湯沢研究会で筑波大学大学院生の姜洪在が「複素射影空間内の Kähler 角度一定曲面」という題目で、複素射影空間内の Kähler 角度一定曲面の Poincaré の公式に関する我々の共同研究の結果を報告した。その後、論文の投稿先のレフェリーと剱持先生の指摘から Kähler 角度一定という条件は必要なくなり、研究会記録集では「複素射影空間内の実曲面の積分幾何学」という題目になっている。この記録で扱っている内容は「n 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$内の実曲面 Mに対して、$U(n+1)$ 上の関数

$$U(n+1) \ni g \mapsto \#(M \cap g\mathbf{C}P^{n-1})$$

の積分を Mの Kähler 角度の関数を M上で積分した値で具体的に表示する」というものだった。ただし、$\#$は集合の元の個数を表している。

この講演では、上の交点数を考えている部分で $\mathbf{C}P^{n-1}$をより一般的な部分多様体にしても、交点数の $U(n+1)$ 上の積分をそれら部分多様体の Kähler 角度の関数の積分で表示できることを報告する。さらに Mが実 2 次元にかぎらず一般次元のときに Poincaé の公式を考えるために、Kähler 角度を一般化した概念：多重 Kähler 角度を導入し、これを使って複素射影空間内の任意の次元の部分多様体に対する Poincaré の公式を定式化する。

2　Poincaré の公式

積分幾何学において Poincaré の公式は基本的であり、Howard [2] による Riemann 等質空間における Poincaré の公式が現在もっとも一般的であると思われる。この節では、この Poincaré の公式を復習しておく。

定理 2.1 (Howard [2]) G/Kを Riemann 等質空間とし、G はユニモジュラーであると仮定する。G/Kの部分多様体 M, Nで $\dim M + \dim N \geq \dim(G/K)$ を満たすものに対して、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \int_{M\times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N) d\mu_{M\times N}(x, y)$$

が成り立つ。

σ_Kについては後で説明する。この定理は一般的な設定のもとで成立するが、右辺の被積分関数$\sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N)$ の具体的表示が得られている場合は少ない。実空間形の場合は、可能なすべての次元の部分多様体に対する Poincaré の公式が得られている。

定理 2.2 G/Kを n 次元実空間形とし (いずれの場合も $K = SO(n)$ とする)、Mと NはそれぞれG/Kの p 次元部分多様体と q次元部分多様体であって、$p+q \geq n$ とする。このとき、

$$\int_G \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_G(g) = \frac{\mathrm{vol}(S^{p+q-n})\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)} \mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

が成り立つ。

これは実空間形のイソトロピー群の Grassmann 多様体への作用が推移的であるという事情から得られる。他にも部分多様体の次元や性質を制限したいくつかの場合に対して、Poincaré の公式が得られている。ただ、それらはすべてσ_Kが定数になる場合であった。

定義 2.3 Eを内積を持つ有限次元実ベクトル空間とし、Vと Wを Eの部分ベクトル空間とする。Vの正規直交基底 $v_1, \dots, v_p$と Wの正規直交基底 $w_1, \dots, w_q$をとり、

$$\sigma(V, W) = |v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q|$$

によって$\sigma(V, W)$ を定義する。この定義は Vと Wの正規直交基底のとり方に依存しない。

定義 2.4 G/Kを Riemann 等質空間とする。$T_x(G/K)$ の部分空間 Vと $T_y(G/K)$ の部分空間 Wに対して、$g_x o = x$ と $g_y o = y$を満たす $g_x, g_y \in G$ をとり、

$$\sigma_K(V, W) = \int_K \sigma((dg_x)_o^{-1} V, dk_o^{-1}(dg_y)_o^{-1} W) d\mu_K(k)$$

によって$\sigma_K(V, W)$ を定義する。この定義は、$g_x o = x$ と $g_y o = y$を満たす $g_x, g_y \in G$ のとり方に依存しない。

　σ_Kの具体的表示を与えることが、定理 2.1の Poincaré の公式の具体的表示を与えることになる。そのためには、$T_o(G/K)$ の部分ベクトル空間 V, Wに対するσ_Kの値$\sigma_K(V, W)$ を考察すれば十分であり、Kの $T_o(G/K)$ への作用を詳しく調べることが重要である。

3　複素射影空間内の実曲面の積分幾何学

　内積と等長的複素構造を持つ複素ベクトル空間内の実 2 次元部分ベクトル空間の Kähler 角度の定義とその基本的性質を述べる。さらに、この Kähler 角度を使って、複素射影空間内の実曲面に関する Poincaré の公式を定式化する。

　$U(1) \times U(n)$ は

$$(z, A) \cdot v = zvA^* \qquad ((z, A) \in U(1) \times U(n),\ v \in \mathbf{C}^n)$$

によって、$\mathbf{C}^n$に作用する。ここで、$\mathbf{C}^n$は横ベクトルの全体を表している。この作用は複素射影空間 $\mathbf{C}P^n = U(n+1)/U(1) \times U(n)$ の線形イソトロピー表現と同値である。

定義 3.1 Vを $\mathbf{C}^n$の実 2 次元部分ベクトル空間とする。Vの正規直交基底 v_1, v_2を

$$0 \leq \langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle$$

を満たすようにとる。このときθを

$$\theta = \cos^{-1} \langle \sqrt{-1} v_1, v_2 \rangle$$

によって定め、Vの **Kähler 角度**と呼ぶ。この定義はVの正規直交基底のとり方に依存しない。特に、θが 0 である必要十分条件は、Vが複素部分ベクトル空間であることであり、θが$\pi/2$ である必要十分条件は、Vが $V \perp \sqrt{-1}V$を満たすことである。

命題 3.2 (Kang-T.[3]) $\mathbf{C}^n$の実 2 次元部分ベクトル空間の Kähler 角度は、$U(1) \times U(n)$ の作用に関して不変である。さらに、G_θを $\mathbf{C}^n$内の Kähler 角度θの実 2 次元部分ベクトル空間全体とすると、$U(n)$ は G_θに推移的に作用する。$\mathbf{C}^n$の標準的ユニタリ基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ をとると Kähler 角度θの実 2 次元部分ベクトル空間の標準形は、

$$V_\theta = \mathrm{span}_{\mathbf{R}} \{ \mathbf{e}_1, \cos\theta \sqrt{-1} \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2 \}$$

になり、$G_\theta = U(n) \cdot V_\theta$が成り立つ。

系 3.3 $\mathbf{C}^n$内の任意の実 2 次元部分ベクトル空間 Vと Wに対して、$\sigma_{U(1)\times U(n)}(V, W^\perp)$ はVと Wの Kähler 角度にのみ依存する。

これらを使って次の定理を証明することができた。

定理 3.4 (Kang-T.[3]) Mを $\mathbf{C}P^n$内の実曲面とし Nを $n-1$ 次元複素部分多様体とする。各点 $x \in M$における $T_x M$の Kähler 角度をθ_xで表すと次の等式が成り立つ。

$$\int_{U(n+1)} \#(gM \cap N) d\mu_{U(n+1)}(g) = \frac{\mathrm{vol}(U(n+1))\mathrm{vol}(N)}{2\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})} \int_M (1 + \cos^2\theta_x) d\mu_M(x).$$

定理 3.5 (Kang-T.[4]) Mと Nを $\mathbf{C}P^2$内の実曲面とする。各点 $x \in M$と $y \in N$における Mと Nの Kähler 角度をそれぞれθ_xとτ_yで表すと次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \int_{U(3)} \#(M \cap gN) d\mu_{U(3)}(g) \\ = \ & \frac{\mathrm{vol}(U(3))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^2)^2} \int_{M\times N} (2 + 2\cos^2\theta_x \cos^2\tau_y + \sin^2\theta_x \sin^2\tau_y) d\mu_{M\times N}(x,y). \end{aligned}$$

最近、これらの結果を統一する次の定理を得た。

定理 3.6 (T.[6]) Mを $\mathbf{C}P^n$内の実曲面とし Nを実 $2n-2$ 次元部分多様体とする。各点 $x \in M$と $y \in N$における $T_x M$と $T_y^\perp N$の Kähler 角度をそれぞれθ_xとτ_yで表すと次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \int_{U(n+1)} \#(gM \cap N) d\mu_{U(n+1)}(g) \\ = \ & \frac{\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})} \\ & \times \int_{M\times N} \left(\frac{1}{4}(1+\cos^2\theta_x)(1+\cos^2\tau_y) + \frac{n}{4(n-1)} \sin^2\theta_x \sin^2\tau_y \right) d\mu_{M\times N}(x,y). \end{aligned}$$

4　Kähler 角度の一般化

前節では複素射影空間内の実曲面と実余次元 2 の部分多様体に関する Poincaré の公式を Kähler 角度を使って表現した。ところが実次元と実余次元が 3 以上の場合は Kähler 角度は使えないので、Kähler 角度の役割を担うものを考える必要がある。そこで、この節では Kähler 角度の一般化である多重 Kähler 角度を導入し、その基本的性質を解説する。

$\mathbf{C}^n$内の Kähler 角度θの実 2 次元部分ベクトル空間 Vに対して、Vの双対空間 V^*の正規直交基底α^1, α^2を

$$\omega|_V = \cos\theta \alpha^1 \wedge \alpha^2$$

を満たすようにとることができる。このことから一般の次元の部分ベクトル空間に対して、Kähler 角度を次のように一般化する。

定義 4.1 (T.[5]) $k \le n$ とする。$\mathbf{C}^n$内の実 k次元部分ベクトル空間 Vに対して、V^*の正規直交基底$\alpha^1, \dots, \alpha^k$を

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \cos\theta_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}, \qquad 0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_{[k/2]} \le \pi/2$$

を満たすようにとることができる。このとき、$\theta(V) = (\theta_1, \dots, \theta_{[k/2]})$ を Vの**多重 Kähler 角度**と呼ぶ。$n < k < 2n$ のとき、$\mathbf{C}^n$内の実 k次元部分ベクトル空間 Vの多重 Kähler 角度は $V^\perp$の多重 Kähler 角度として定義する。

注意 4.2 $k \le n$ とする。$\mathbf{C}^n$内の実 k次元部分ベクトル空間 Vに対して、以下が成り立つ。

(1) $U(1) \times U(n)$ の作用は多重 Kähler 角度を不変にする。

(2) $k = 1$ のときは、$U(n)$ は $\mathbf{C}^n$内の実 1 次元部分ベクトル空間全体の成す Grassmann 多様体 $G_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ に推移的に作用するので、実 1 次元部分ベクトル空間の多重 Kähler 角度は定義する必要はない。

(3) $k = 2$ のときは、多重 Kähler 角度は Kähler 角度に一致する。

(4) $\theta(V) = (0, \dots, 0)$ の必要十分条件は、V内に複素 $[k/2]$ 次元部分ベクトル空間が存在することである。

(5) $\theta(V) = (\pi/2, \dots, \pi/2)$ の必要十分条件は、$V \perp \sqrt{-1}V$が成り立つことである。

命題 4.3 (T.[5]) $k \le n$ とする。$0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_{[k/2]} \le \pi/2$ となる$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{[k/2]})$ に対して

$$G_\theta = \{V \in G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n) \mid W \text{の多重 Kähler 角度は} \theta\}$$

とおくと、$U(n)$ は G_θに推移的に作用する。さらに、

$$V_\theta^k = \sum_{i=1}^{[k/2]} \mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{\mathbf{e}_{2i-1}, \cos\theta_i\sqrt{-1}\mathbf{e}_{2i-1} + \sin\theta_{2i}\mathbf{e}_{2i}\} \quad (+\mathbf{R}\mathbf{e}_k)$$

とおくと (最後の項は kが奇数のときのみ加える)、$G_\theta = U(n) \cdot V_\theta^k$が成り立つ。

$U(n)$ の $\mathbf{C}^n$への作用は、自然に Grassmann 多様体 $G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n)$ への作用を誘導する。ここで、$G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n)$ は $\mathbf{C}^n$内の実 k次元部分ベクトル空間全体の成す Grassmann 多様体である。これは等質空間として

$$G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n) = O(2n)/O(k) \times O(2n-k)$$

と表すことができる。これはコンパクト対称空間であり $O(2n)/U(n)$ もコンパクト対称空間だから、$U(n)$ の $G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n)$ への作用は Hermann 作用になっている。一般に二つのコンパクト対称対 (G, K_1) と (G, K_2) に対して、K_2の G/K_1への自然な作用を Hermann 作用と呼ぶ。Hermann[1] はこの作用が平坦な断面を持つことを示している。群作用の断面とは、任意の軌道に直交して交わる閉部分多様体のことである。

命題 4.4 (T.[5]) $k \le n$ のとき、$\{V_\theta^k \mid \theta \in \mathbf{R}^{[k/2]}\}$ は $U(n)$ の $G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n)$ への作用に関する平坦な断面である。

この平坦な断面 $\{V_\theta^k \mid \theta \in \mathbf{R}^{[k/2]}\}$ はトーラスになり、多重 Kähler 角度 $(\theta_1, \ldots, \theta_{[k/2]})$ はこのトーラスの座標になっている。これが群作用の観点から見た多重 Kähler 角度の意味である。

5　複素射影空間内の積分幾何学

前節で導入した多重 Kähler 角度を使って、複素射影空間内の可能な次元の任意の部分多様体に関する Poincaré の公式を定式化する。$n < k$のとき、$V_\theta^k = (V_\theta^{2n-k})^\perp$とおく。

定理 5.1 (T.[5]) $p, q \le 2n \le p+q$を満たす p, qに対して

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q}^n(\theta^{(p)}, \theta^{(q)}) &= \int_{U(1)\times U(n)} \sigma(V_{\theta^{(p)}}^{2n-p}, k^{-1} \cdot V_{\theta^{(q)}}^{2n-q}) d\mu_{U(1)\times U(n)}(k) \\ & \quad (\theta^{(p)} \in \mathbf{R}^{[\min\{p,2n-p\}/2]},\ \theta^{(q)} \in \mathbf{R}^{[\min\{q,2n-q\}/2]}) \end{aligned}$$

とおく。このとき、$\mathbf{C}P^n$内の実 p 次元部分多様体 Mと実 q次元部分多様体 Nに対して、次の等式が成り立つ。

$$\int_{U(n+1)} \mathrm{vol}(gM \cap N) d\mu_{U(n+1)}(g) = \int_{M\times N} \sigma_{p,q}^n(\theta(T_xM), \theta(T_yN)) d\mu_{M\times N}(x, y).$$

この定理では、Poincaré の公式を多重 Kähler 角度で表現できることを示しただけで、$\sigma_{p,q}^n$ の具体的表示がわかっている場合はまだ少ない。第 3 節の結果は

$$\begin{aligned} & \sigma_{2,2n-2}^n(\theta, \tau) \\ = \ & \frac{\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})} \left(\frac{1}{4}(1+\cos^2\theta)(1+\cos^2\tau) + \frac{n}{4(n-1)} \sin^2\theta \sin^2\tau \right) \end{aligned}$$

を示している。

参考文献

[1] R. Hermann, Variational completeness for compact symmetric spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **11**, (1960), 544 – 546.

[2] R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106**, (1993).

[3] H.J. Kang and H. Tasaki, Integral geometry of real surfaces in complex projective spaces, to appear in Tsukuba J. Math.

[4] H.J. Kang and H. Tasaki, Integral geometry of real surfaces in the complex projective plane, preprint.

[5] H. Tasaki, Generalization of Kähler angle and integral geometry in complex projective spaces, preprint.

[6] H. Tasaki, Integral geometry of submanifolds of real dimension and codimension two in complex projective spaces, preprint.