曲面の「まがり方」について

安藤　直也 (都立大理, 学振特別研究員 PD)

平面曲線の「まがり方」を認識しようとするときには曲率というものを考えた. 曲面の「まがり方」を, 平面曲線の場合に帰着させることで認識しようと思うとき, 各法平面による曲面の切口の曲率すなわち法曲率に着目することになる. 曲面の一点での法平面はたくさん存在するので, その点での曲面の「まがり方」は法平面の分だけ多様であると思われる. しかしながら実際には各点での法曲率のふるまいは二次形式的である: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ をある点での接平面の正規直交基底とするとき, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ から定まる $[0, \pi)$ の元 θ_0 および $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ のとり方にはよらない二つの実数 κ_1, κ_2 が存在して

$$\mathbf{e}(\theta) := (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)\mathbf{e}_2$$

を含む法平面から定まる法曲率 $\kappa(\theta)$ は次のように表される:

$$\kappa(\theta) = \kappa_1 \cos^2(\theta - \theta_0) + \kappa_2 \sin^2(\theta - \theta_0). \tag{1}$$

θ_* は実数で, κ が θ_* で極値をとるものとする. このとき $\mathbf{e}(\theta_*)$ を含む一次元部分空間を主方向 (principal direction) といい, 対応する法曲率 $\kappa(\theta_*)$ を主曲率 (principal curvature) という. $\kappa_1 = \kappa_2$ を仮定する. このとき κ は定数であり, 任意の一次元部分空間が主方向である. そして曲面はどの方向にも同じようにまがっているように思われる. このような点のことを臍点 (umbilical point) という. 次に $\kappa_1 \neq \kappa_2$ を仮定する. このとき(1) から主方向はちょうど二つ存在することがわかり, 非臍点で曲面の「まがり方」を把握しようとするとき特に注目すべきは主曲率および主方向であることがわかる.

一点での曲面の「まがり方」については以上のようなことがしられているが, 一点の (十分小さい) 近傍の各点での曲面の「まがり方」はどのようになっているであろうか. 曲面の非臍点全体からなる集合上の連続一次元分布で各点において主方向の一つを与えるようなもののことを, 曲面上の主分布 (principal distribution) とよぶ. 以下非臍点全体からなる集合が連結であるものと仮定する. このとき主分布はちょうど二つ存在する. それらを $\mathcal{D}^{(1)}$, $\mathcal{D}^{(2)}$ で表す. また $\kappa^{(1)}$ および $\kappa^{(2)}$ は非臍点全体からなる集合上の実数値関数で, 各点で $\mathcal{D}^{(1)}$ および $\mathcal{D}^{(2)}$ がそれぞれ定める主方向に対応する主曲率を与えるものとする. このとき $\kappa^{(1)}$ および $\kappa^{(2)}$ は連続関数である. よって非臍点の十分小さい近傍の各点での曲面の「まがり方」というのは始めに認識した非臍点でのものを「少し変形した」ものであるこ

とがわかる, つまりすぐ近くの点での主曲率および主方向を始めの点でのものから大体把握することができる．それでは臍点の近傍の各点での曲面のまがり方はどうであろうか. ここで臍点は孤立している, つまりこの点のある近傍にはこの点以外に臍点は存在しないものと仮定する．このとき $\kappa^{(1)}$ および $\kappa^{(2)}$ をこの孤立臍点まで連続に延長することは必ずできるが, 一方主分布をこの孤立臍点まで連続に延長することはできない可能性がある. そしてこのような点の周りでは主分布のふるまいは非常に複雑な場合がある.

著者は二変数同次多項式のグラフが $\mathbf{R}^3$ の原点 o を孤立臍点として有するとき o の周りでの主分布のふるまいを調べた．g をそのような同次多項式とし, 各実数 $\theta \in \mathbf{R}$ に対し $\tilde{g}(\theta) := g(\cos\theta, \sin\theta)$ とおく．そして $d\tilde{g}/d\theta = 0$ の解全体からなる集合を R_g で表す．このとき点 (x, y) で位置ベクトル場 $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ が g のグラフ G_g の主方向に含まれることと, $x\sin\theta_0 = y\cos\theta_0$ なる実数 θ_0 が R_g の元であることは同値である ([1])．そこで著者は位置ベクトル場と関連づけて主分布のふるまいを調べることにした. 以下 $R_g \neq \mathbf{R}$ を仮定する.

r_0 は正の実数で, g を $\left\{0 < x^2 + y^2 < r_0^2\right\}$ に制限したもののグラフ上臍点は存在しないものとする．また r は $(0, r_0)$ の元とする．R_g の元 θ_0 に対し, ϕ_{r,θ_0} は $\mathbf{R}$ 上の実数値をとる連続関数で $\phi_{r,\theta_0}(\theta_0) = \theta_0$ をみたしかつ任意の実数 θ に対し点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ での G_g への接ベクトル $(\cos\phi_{r,\theta_0}(\theta))\partial/\partial x + (\sin\phi_{r,\theta_0}(\theta))\partial/\partial y$ が主方向に含まれるようなものとする. また R_g の元 θ_0 に対し, U_{θ_0} は θ_0 の $\mathbf{R}$ における近傍で $U_{\theta_0} \cap R_g = \{\theta_0\}$ をみたすものとする．このとき R_g の元 θ_0 の <u>符号 (sign)</u> が正 (および負) であるとは, $U_{\theta_0} \setminus \{\theta_0\}$ の任意の元 θ に対し

$$(\theta - \phi_{r,\theta_0}(\theta))(\theta - \theta_0) > 0 \ (\text{および} < 0)$$

がなりたつときにいうものとする．R_g の元の符号の定義は $r \in (0, r_0)$ のとり方にはよらない. R_g の元 θ_0 が (o の指数に) <u>関係がある (related)</u> (および <u>関係がない (non-related)</u>) とは, θ_0 の符号が正または負である (および正でも負でもない) ときにいうものとする．R_g の元 θ_0 が関係があることと, $\tilde{g}$ が θ_0 で極値をとることは同値である ([1])．R_g の元 θ_0 の <u>臨界符号 (critical sign)</u> が

(a) 正であるとは, $\tilde{g}(\theta_0) = 0$ であるか $\tilde{g}(\theta_0)$ が正かつ極大値であるかまたは $\tilde{g}(\theta_0)$ が負かつ極小値であるときにいい,

(b) 負であるとは, $\tilde{g}(\theta_0)$ が負かつ極大値であるかまたは $\tilde{g}(\theta_0)$ が正かつ極小値であるときにいう

ものとする. R_g の元 θ_0 が関係があることと, θ_0 の臨界符号が正または負であることは同値である. R_g の関係がある元 θ_0 の符号と臨界符号について次の二つがなりたつ: θ_0 の臨界符号が正ならば θ_0 の符号も正である ([1], [2]); θ_0 の臨界符号が負であるとき, θ_0 の符号が正 (および負) であることと

$$\frac{d^2\tilde{g}}{d\theta^2}(\theta_0)\Big/\tilde{g}(\theta_0) \in [k(k-2), \infty) \ (\text{および} \in [0, k(k-2)))$$

がなりたつことは同値である ([2]). θ_0 が R_g の元であるとき, 任意の整数 n に対し $\theta_0 + n\pi$ も R_g の元である. さらに θ_0 が関係があることと $\theta_0 + n\pi$ が関係があることは同値である. また θ_0 が関係があるとき, θ_0 の符号および臨界符号はそれぞれ $\theta_0 + n\pi$ の符号および臨界符号に等しい. 実数 $\theta \in \mathbf{R}$ を任意に選び, $N_{g,+}$ (および $N_{g,-}$) を $[\theta, \theta+\pi)$ の中の R_g の関係がある元でその符号が正 (および負) であるものの個数とする. $N_{g,+}$ と $N_{g,-}$ は $\theta \in \mathbf{R}$ のとり方にはよらない. G_g 上での o の指数 $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g)$ は $1-(N_{g,+}-N_{g,-})/2$ と表される ([1]). θ_1, θ_2 は R_g の関係がある元で, $\theta_1 < \theta_2$ でありかつ開区間 (θ_1, θ_2) には R_g の関係がある元が存在しないものとする. このとき θ_1 の臨界符号または θ_2 の臨界符号は正である. よって θ_1 の符号または θ_2 の符号は正であることがわかる. このことを用いて $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g) \leqq 1$ がわかる. さらに $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_g) \in \{1-k/2+i\}_{i=0}^{[k/2]}$ がなりたつ ([1]).

実解析的な曲面上の孤立臍点の周りでの主分布のふるまいは, 大体の場合にある同次多項式のグラフ上でのもののようになっていることがわかった ([3]).

同次多項式 g のグラフ上での主分布のふるまいに関連して, R_g の関係がある元の符号と臨界符号の間の関係を上にのべた. 特に, 臨界符号が正ならば符号も正であった. このことは o の指数が 1 以下であることの根拠となっており, 一般に曲面上の孤立臍点の指数は 1 以下なのではないか (つまり指数予想は正しい) と思わせる有力な状況証拠のように思われる. しかしながら一方で, 著者は符号と臨界符号の間に上述のような関係がなりたつことに対する必然性を感じるには至っていないような気がしていたので, 他ににたような現象をみつけることができないだろうかと思い探していたところみつけることができた. 以下にそれを記述する.

n を自然数とする. そして $\mathbf{R}^2$ の領域 D 上の滑らかな関数 f に対し, $d^n f$ を次のような $(0, n)$ 型のテンソル場とする:

$$d^n f := \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} dx^{n-i} dy^i.$$

また各実数 ϕ および D の各点 p に対し, 次のようにおく:

$$\mathbf{U}_\phi := \cos\phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \widehat{(d^n f)}_p(\phi) := (d^n f)_p(\mathbf{U}_\phi, \ldots, \mathbf{U}_\phi).$$

D の点 p での接平面の一次元部分空間 L に対し $(\widehat{d^n f})_p$ の臨界点 ϕ_0 があって $\mathbf{U}_{\phi_0}(p) \in L$ がなりたつとき, L を $d^n f$ の p での 臨界方向 (critical direction) ということにする. D の点 p_0 が $d^n f$ の 臍点 であるとは, $(\widehat{d^n f})_{p_0}$ が定数であるとき, すなわち p_0 での接平面の全ての一次元部分空間が臨界方向であるときにいうものとする. 以下 $d^n f$ の臨界方向の数は非臍点によらないものと仮定し, その数を $N_{d^n f}$ で表す. そして $d^n f$ の非臍点全体からなる集合上の有限多価一次元分布で, 各点で $d^n f$ の $N_{d^n f}$ 個の臨界方向を与えるようなものを $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n f}$ で表す.

例 $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^1 f}$ は f の勾配ベクトル場が定める一価一次元分布である.

例 $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^2 f}$ は f の Hessian の二つの一次元固有空間から構成される二価一次元分布である.

k を n より大きい整数とし, g は二変数 k 次同次多項式で $(0,0)$ が $d^n g$ の孤立臍点でありかつ $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上 $d^n g$ の臨界方向の数は一定 $N_{d^n g}$ であるものと仮定する. このとき位置ベクトル場が点 (x,y) で $d^n g$ の臨界方向の一つに含まれることと, $x \sin\theta_0 = y \cos\theta_0$ なる実数 θ_0 が R_g の元であることは同値である ([4]). I を $\mathbf{R}$ の開区間とする. また $E^{(n)}_{g,I}$ は I 上の連続関数の集合で, 任意の $\eta_g \in E^{(n)}_{g,I}$ および任意の $\theta \in I$ に対し $(\cos\theta, \sin\theta)$ での接ベクトル $(\cos\eta_g(\theta))\partial/\partial x + (\sin\eta_g(\theta))\partial/\partial y$ は $d^n g$ の臨界方向に含まれるものとする. そして $R(d^n g)$ は $\mathbf{R}$ の部分集合で, 各 $\theta_0 \in R(d^n g)$ に対し θ_0 を含む開区間 I および $E^{(n)}_{g,I}$ の元 η_{g,θ_0} が存在して $\theta_0 = \eta_{g,\theta_0}(\theta_0)$ をみたすようなものとする. このとき $R(d^n g) \subset R_g$ がなりたつ. 以下 $R_g \neq \mathbf{R}$ を仮定する. θ_0 を $R(d^n g)$ の元とし, I_{θ_0} は $I_{\theta_0} \cap R(d^n g) = \{\theta_0\}$ をみたす開区間でありかつ $E^{(n)}_{g,I_{\theta_0}}$ の二元 $\eta_{g,1}$, $\eta_{g,2}$ が $I_{\theta_0} \setminus \{\theta_0\}$ のある点 θ で $\eta_{g,1} = \eta_{g,2}$ をみたすならば θ を含む $I_{\theta_0} \setminus \{\theta_0\}$ の連結成分上 $\eta_{g,1} \equiv \eta_{g,2}$ がなりたつようなものとする. このとき自然数 $N^{(n)}_g(\theta_0)$ が存在して, θ_0 で θ_0 に等しい $E^{(n)}_{g,I_{\theta_0}}$ の元の数は $N^{(n)}_g(\theta_0)^2$ に等しい. $R(d^n g)$ の元 θ_0 が $\tilde{g}(\theta_0) \neq 0$ をみたすならば $N^{(n)}_g(\theta_0) = 1$ がなりたつ ([4]). $R(d^n g)$ の元 θ_0 の 符号 が正 (および負) であるとは, $I_{\theta_0} \setminus \{\theta_0\}$ の任意の元 θ および θ_0 で θ_0 に等しい $E^{(n)}_{g,I_{\theta_0}}$ の任意の元 η_{g,θ_0} に対し

$$(\theta - \eta_{g,\theta_0}(\theta))(\theta - \theta_0) > 0 \text{ (および} < 0)$$

がなりたつときにいうものとする; $R(d^n g)$ の元 θ_0 が 関係がある $\big($および 関係がない$\big)$ とは, θ_0 の符号が正または負である (および正でも負でもない) ときにいうものとする. $R(d^n g)$ の元 θ_0 に対し, θ_0 が関係があることと次のいずれか一つがなりたつことは同値である ([4]):

(a) $\tilde{g}(\theta_0) = 0$;

(b) $\tilde{g}$ は θ_0 で極値をとる.

また $R(d^n g)$ の元 θ_0 に対し, θ_0 が関係があることと θ_0 の臨界符号が正または負であることは同値である. $R(d^n g)$ の関係がある元 θ_0 の符号と臨界符号について次の二つがなりたつ: θ_0 の臨界符号が正ならば θ_0 の符号も正である ([4]); θ_0 の臨界符号が負でありかつ θ_0 が

$$(n-1)\frac{d^2\tilde{g}}{d\theta^2}(\theta_0) \neq (k(k-n))\tilde{g}(\theta_0)$$

をみたすとき, θ_0 の符号が正 (および負) であることと

$$(n-1)\frac{d^2\tilde{g}}{d\theta^2}(\theta_0)\Big/\tilde{g}(\theta_0) \in (k(k-n), \infty) \ (\text{および}\ [0, k(k-n)))$$

がなりたつことは同値である ([4]). $R(d^n g)$ の関係がある元で符号が正 (および負) であるもの全体からなる集合を $R_+(d^n g)$ (および $R_-(d^n g)$) で表し, $\varepsilon \in \{+, -\}$ に対し

$$N_{g,\varepsilon}^{(n)} := \sum_{\theta_0 \in R_\varepsilon(d^n g) \cap [\theta, \theta+\pi)} N_g^{(n)}(\theta_0)$$

とおく. このとき $\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g}$ についての $(0,0)$ の指数 $\mathrm{ind}_{(0,0)}\bigl(\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g}\bigr)$ は $1 - \bigl(N_{g,+}^{(n)} - N_{g,-}^{(n)}\bigr)/N_{d^n g}$ と表される ([4]). さらに $\mathrm{ind}_{(0,0)}\bigl(\tilde{\mathfrak{D}}_{d^n g}\bigr) \leqq 1$ がなりたつ.

参考文献

[1] N. Ando, An isolated umbilical point of the graph of a homogeneous polynomial, Geom. Dedicata **82** (2000) 115–137.

[2] N. Ando, The behavior of the principal distributions around an isolated umbilcal point, J. Math. Soc. Japan **53** (2001) 237–260.

[3] N. Ando, The behavior of the principal distributions on a real-analytic surface, preprint.

[4] N. Ando, A conjecture in relation to Loewner's conjecture, preprint.

〒 192-0397 東京都八王子市南大沢１－１

東京都立大学大学院理学研究科数学教室

E-mail address: naoya@comp.metro-u.ac.jp

HomePage address: http://www.math.metro-u.ac.jp/∼ando/index.html