調和逆平均曲率曲面の微分幾何的な特徴付け

藤岡敦 (金沢大学)

調和逆平均曲率曲面は, 1994 年に Bobenko [2] によって 3 次元 Euclid 空間内の曲面の場合に平均曲率一定曲面の一般化として定義された比較的新しい曲面族であり, Fokas-Gelfand [5] による特徴付けを経て, 一般の 3 次元空間形内の曲面の場合に筆者 [6] により定義されたが, 何れも可積分系理論の立場から導入されたものであった. その後の進展及び関連する話題については [3, 4, 7, 8, 9] 等を参照されたい. ここではその調和逆平均曲率曲面を曲率を用いて表されるある量を保つような曲面の変換を許容するものとして特徴付ける.

$\mathfrak{M}^3(c)$ を定曲率 c ($c = 0, \pm 1$) の単連結完備 3 次元空間形とし, $\mathfrak{M}^3(c)$ 内の曲面を Riemann 面 M から $\mathfrak{M}^3(c)$ への共形的はめ込みとして表すことにする. z を局所正則座標とし, M の誘導計量を $e^u dz d\bar{z}$ と表すことにすると, Gauss-Codazzi の方程式は次の様になる ([1]).

$$\begin{cases} u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H^2 + c)e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0 & (\text{Gauss の方程式}), \\ Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2} H_z e^u & (\text{Codazzi の方程式}). \end{cases}$$

ここで, H, Qdz^2 はそれぞれ F の平均曲率, Hopf 微分である.

1 次元 Riemann 多様体 (I_c, g_c) を

$$I_c = \begin{cases} (\mathbf{R}, g_c) & (c = 0, 1), \\ (\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}, g_c) & (c = -1), \end{cases} \qquad g_c = \frac{1}{(1 + ct^2)^2} dt^2$$

により定める.

定義 $\frac{1}{H} : M \to I_c$ が調和写像のとき, F を調和逆平均曲率曲面とよぶ.

上に現れる調和写像の方程式は

$$H_{z\bar{z}} - \frac{2H|H_z|^2}{H^2 + c} = 0$$

だからこれは具体的に解くことができ, M 上の正則関数 h を用いて

$$H = \begin{cases} \frac{|h|^2}{h + \bar{h}} & (c = 0), \\ \frac{|h|^2 - c}{h + \bar{h}}, \ \frac{h + \bar{h}}{|h|^2 - c} & (c = \pm 1) \end{cases}$$

となる.
$H=\frac{|h|^2-c}{h+\bar{h}}$ のとき, $t\in\mathbf{R}$ に対し $\varphi_t=\frac{h^2+c}{(h+\sqrt{-1}t)^2+c}$ とおくと, 変換

$$e^u\to|\varphi_t|^2e^u,\ H^2+c\to\frac{1}{|\varphi_t|^2}(H^2+c),\ Q\to\varphi_tQ$$

は調和逆平均曲率曲面としての共形的変形をあたえる. F の Gauss 曲率を K とすると, $K=H^2+c-4|Q|^2e^{-2u}$ だから $\frac{K}{H^2+c}$ という量は上の変形で不変である. 同様に, $H=\frac{h+\bar{h}}{|h|^2-c}$ $(c=\pm1)$ のとき, $\lambda\in S^1=\{w\in\mathbf{C}||w|=1\}$ に対し $\varphi_\lambda=\frac{h^2+c}{\lambda^2h^2+c}$ とおくと, 変換

$$e^u\to|\varphi_\lambda|^2e^u,\ H^2+c\to\frac{1}{|\varphi_\lambda|^2}(H^2+c),\ Q\to\varphi_\lambda Q$$

は調和逆平均曲率曲面としての共形的変形をあたえ, $\frac{K}{H^2+c}$ という量は不変である.

逆に, φ を M 上で 0 とならず, 定数でない正則関数とすると, Gauss の方程式は変換

$$e^u\to|\varphi|^2e^u,\ H^2+c\to\frac{1}{|\varphi|^2}(H^2+c),\ Q\to\varphi Q$$

で不変である. また, この変換が $\mathfrak{M}^3(c)$ 内の曲面を定めれば, $\frac{K}{H^2+c}$ という量も不変である. 更に, 次が成り立つ.

定理 F が臍点をもたず, 上の変換が $\mathfrak{M}^3(c)$ 内の曲面を定めれば, F は調和逆平均曲率曲面である.

証明 $(H')^2+c=\frac{1}{|\varphi|^2}(H^2+c)$ とおき, 両辺を z で微分すると,

$$2H'H'_z=-\frac{\bar{\varphi}\varphi_z}{|\varphi|^4}(H^2+c)+\frac{2}{|\varphi|^2}HH_z.$$

F が臍点をもたないことより $Q\neq0$ だから, F と新たに得られる曲面に対する Codazzi の方程式より,

$$H'_z=\frac{1}{\bar{\varphi}}H_z. \qquad (*)$$

よって,

$$H'=-\frac{\varphi_z}{2\varphi^2}\frac{H^2+c}{H_z}+\frac{1}{\varphi}H.$$

両辺を $\bar{z}$ で微分すると

$$H'_{\bar{z}} = \frac{\varphi_z}{2\varphi^2}\frac{(H^2+c)H_{z\bar{z}} - 2H|H_z|^2}{H_z^2} + \frac{1}{\varphi}H_{\bar{z}}$$

だから, 再び $(*)$ を用いると

$$H_{z\bar{z}} - \frac{2H|H_z|^2}{H^2+c} = 0.$$

従って, F は調和逆平均曲率曲面である.

参考文献

[1] A. I. Bobenko, *Surfaces of constant mean curvature and integrable equations.* Russian Math. Surveys **46** (1991), no. 4, 1–45.

[2] A. I. Bobenko, *Surfaces in terms of* 2 *by* 2 *matrices. Old and new integrable cases.* Harmonic maps and integrable systems, Aspects Math., E23, Vieweg, Braunschweig, 1994, pp. 83–127.

[3] A. I. Bobenko and U. Eitner, Painlevé equations in the differential geometry of surfaces. Lecture Notes in Mathematics, 1753. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[4] A. Bobenko, U. Eitner and A. Kitaev, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painlevé equations.* Geom. Dedicata **68** (1997), no. 2, 187–227.

[5] A. S. Fokas and I. M. Gelfand, *Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability.* With an appendix by Juan Carlos Alvarez Paiva. Comm. Math. Phys. **177** (1996), no. 1, 203–220.

[6] A. Fujioka, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature in space forms.* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 10, 3021–3025.

[7] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Bonnet surfaces with constant curvature.* Results Math. **33** (1998), no. 3-4, 288–293.

[8] A. Fujioka and J. Inoguchi, *On some generalisations of constant mean curvature surfaces.* Towards 100 years after Sophus Lie (Kazan, 1998). Lobachevskii J. Math. **3** (1999), 73–95 (electronic).

[9] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Spacelike surfaces with harmonic inverse mean curvature.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), no. 4, 657–698.