調和切断をもつ部分多様体とその指数について

長谷川和志 (東京理科大学理学部)

2002 年 11 月 21 日

1　序

M をコンパクトリーマン多様体，TM を佐々木計量が与えられた M の接束とする．$U(TM)$ を単位接球束とし，TM の佐々木計量の誘導計量を与えておく．長さが 1 のベクトル場 X は M から $U(TM)$ への滑らかな写像であるので，上で述べた計量に関する X のエネルギーが定義できる．M から $U(TM)$ への滑らかな写像の空間上で定義されたエネルギー汎関数を $\mathcal{E}$，長さが 1 の M 上のベクトル場の全体を $\Gamma(U(TM))$ とする．$X \in \Gamma(U(TM))$ が任意の滑らかな変分 $X_t \in \Gamma(U(TM))$ $(X_0 = X)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(X_t)\Big|_{t=0} = 0$$

を満たすとき $X \in \Gamma(U(TM))$ は調和ベクトル場と呼ばれる．例えば，奇数次元の単位球面の Hopf ベクトル場は調和ベクトル場である (より一般の場合は [3] を参照)．また，[1], [2], [4], [5], [6] 等も参照のこと．これらは，リーマン多様体 M 上のリーマンベクトル束 E の場合にも同様に定式化できる (調和ベクトル場に相当するのもは調和切断．詳細は 2 節で述べる)．本稿では，等長はめこみ $f : M \to \tilde{M}$ に対して，引き戻し束 $f^{\#}(T\tilde{M})$ を考え ($E = f^{\#}(T\tilde{M})$ ととる)，その調和切断で部分多様体に垂直なものについて論じる．

2　準備

この節では，基本的な定義を整理しておく．E を n 次元リーマン多様体 (M, g) 上のベクトル束とする．$\Gamma(E)$, $\mathcal{C}(E)$ をそれぞれ E の切断の全体および接続の全体の集合をする．g^E を E のファイバー計量とし，$\nabla^E \in \mathcal{C}(E)$ を g^E と適合した接続とす

る．$K: TE \to E$ を ∇^E によって決まる接続写像とする．E 上の (標準) 計量 G を, E の接ベクトル η に対して,

$$G(\eta, \eta) = g(p_*(\eta), p_*(\eta)) + g^E(K(\eta), K(\eta))$$

で定義する．ここで，$p: E \to M$ は射影を表す．$UE(= U(E)) := \{u \in E | g^E(u, u) = 1\}$ とし，G を UE に制限したものも，同じ G で表す． 任意の $x \in M$ に対して $g^E(\xi(x), \xi(x)) = 1$ となる $\xi \in \Gamma(E)$ 全体の集合を $\Gamma(UE)$ と表す．$\xi \in \Gamma(UE)$ の上記の計量に関するエネルギー $\mathcal{E}(\xi)$ は

$$\mathcal{E}(\xi) = \frac{n}{2}\mathrm{Vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \|\nabla^E \xi\|^2 dv_g$$

となり, 切断 $\xi \in \Gamma(UE)$ が任意の滑らかな変分 $\xi_t \in \Gamma(UE)$ $(\xi_0 = \xi)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\xi_t)\Big|_{t=0} = 0$$

を満たすとき $\xi \in \Gamma(UE)$ は調和切断 (harmonic section) と呼ばれる．調和切断 $\xi \in \Gamma(UE)$ が任意の滑らかな変分 $\xi_t \in \Gamma(UE)$ $(\xi_0 = \xi)$ に対して

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{E}(\xi_t)\Big|_{t=0} \geq 0$$

を満たすとき調和切断 ξ は弱安定であるという．

$f: (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を n 次元リーマン多様体から m 次元リーマン多様体への等長はめ込みとする．$\tilde{\nabla}$ を $\tilde{g}$ の Levi-Civita 接続とし $f^\#\tilde{\nabla}$ をその f による引き戻し接続とする．第二基本形式，形作用素，法接続をそれぞれ，h, S, $\nabla^\perp$ とし, H を平均曲率ベクトルとする．直交分解 $f^\#(T\tilde{M}) = TM \oplus T^\perp M$ に対して $\iota: T^\perp M \to f^\#(T\tilde{M})$ を包含写像とする，ここで，$T^\perp M$ は法束を表す．$\xi \in \Gamma(U(T^\perp M))$ に対して，$\iota \circ \xi \in \Gamma(U(f^\#(T\tilde{M}))$ が $U(f^\#(T\tilde{M}))$ の $f^\#\tilde{\nabla}$ に関する標準計量について, 調和切断となる条件および, 第二変分から定義されるヘッシアン $\mathcal{H}_{\iota\circ\xi}$ の指数 $\mathrm{Index}(\mathcal{H}_{\iota\circ\xi})$ に関する結果を次節で述べる．

3 調和切断をもつ部分多様体

$f: (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を n 次元リーマン多様体から m 次元リーマン多様体への等長はめ込みとする．

定理 3.1. $\xi \in \Gamma(U(T^{\perp}M))$ に対して, $\iota \circ \xi \in \Gamma(U(f^{\#}(T\tilde{M})))$ が調和切断であるための必要十分条件は

$$\bar{\triangle}^{\nabla^{\perp}}(\xi) + \sum_{k=1}^{n} h(e_k, S_{\xi}(e_k)) = (\|S_{\xi}\|^2 + \|\nabla^{\perp}\xi\|^2)\xi,$$

かつ

$$\sum_{k=1}^{n}\{(\nabla_{e_k}S)_{\xi}(e_k) + 2S_{\nabla^{\perp}_{e_k}\xi}(e_k)\} = 0.$$

を満たすことである. ここで, $\bar{\triangle}^{\nabla^{\perp}}$ は $\nabla^{\perp}$ の疎ラプラシアンであり, $e_1, \cdots, e_n$ は M の正規直交枠である.

定理 3.1 により, M が定曲率空間形内の向き付け可能な超曲面の場合に, 単位法ベクトル場 ξ に対して, $\iota \circ \xi$ が調和切断であることの必要十分条件は M が平均曲率一定超曲面であることが示せる. また, M が佐々木多様体 $\tilde{M}$ 内のルジャンドル部分多様体の場合に, その特性ベクトル場 V の f による引き戻し $f^{\#}(V)$ について, $\iota \circ f^{\#}(V)$ が調和切断であることの必要十分条件は M が極小部分多様体であることが示せる. 他に, M が外在的球面 (全臍, $\nabla^{\perp}H = 0$, $H \neq 0$) の場合の $\iota \circ (\|H\|^{-1}H)$ は調和切断となることが分かる.

$\tilde{R}$ を $\tilde{M}$ の曲率テンソルとし, $X \in T_xM (x \in M)$ に対して

$$r_x(X, X) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}(\tilde{R}(f_*(e_i), f_*(X))f_*(X), f_*(e_i))$$

とおく. ここで, $e_1, \cdots, e_n$ は T_xM の正規直交基底である. $\mathrm{Index}(\mathrm{id}_M)$ を M の恒等写像 id_M の調和写像としての指数とする.

定理 3.2. $\xi \in \Gamma(U(T^{\perp}M))$ に対して $\iota \circ \xi \in \Gamma(U(f^{\#}(T\tilde{M})))$ が調和切断であるとする. 任意 $X \in TM$ に対して,

$$(\|S_{\xi}\|^2 + \|\nabla^{\perp}\xi\|^2)g(X, X) \geq r(X, X) + ng(S_H X, X)$$

ならば

$$\mathrm{Index}(\mathcal{H}_{\iota\circ\xi}) \geq \mathrm{Index}(\mathrm{id}_M)$$

が成立する.

$\xi \in \Gamma(U(T^{\perp}M))$ に対して, $\iota \circ \xi$ のエネルギー $\mathcal{E}(\iota \circ \xi)$ は

$$\mathcal{E}(\iota \circ \xi) = \frac{n}{2}\mathrm{Vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M (\|S_\xi\|^2 + \|\nabla^{\perp}\xi\|^2) dv_g$$

表せる．よって，$\|S_\xi\|^2 = 0$ かつ $\|\nabla^{\perp}\xi\|^2 = 0$ のとき，$\iota \circ \xi$ は弱安定な調和切断になる．一方，上の定理は $\iota \circ \xi$ が調和切断のとき，$\|S_\xi\|^2 + \|\nabla^{\perp}\xi\|^2$ が "ある程度大きい" 場合は指数 $\mathrm{Index}(\mathcal{H}_{\iota\circ\xi})$ は M の内在的幾何学量 $\mathrm{Index}(\mathrm{id}_M)$ で下から押さえられることを意味している．次節では弱安定な $\iota \circ \xi$ をもつ部分多様体を特別な場合に考察する．

4 単位球面内の平均曲率一定超曲面の単位法ベクトル場の安定性について

前節で述べたように，$\tilde{M}$ が定曲率空間で M がその中の向き付け可能な超曲面の場合は $\xi \in \Gamma(U(T^{\perp}M))$ に対して $\iota \circ \xi$ が調和切断であることの必要十分条件は平均曲率が一定であることである．ここでは，$\tilde{M}$ が単位球面 $S^{n+1}(1)$ の場合を考える．ξ を $S^{n+1}(1)$ の中の向き付け可能な平均曲率一定超曲面 M の単位法ベクトル場とする．$\iota \circ \xi$ のエネルギー $\mathcal{E}(\iota \circ \xi)$ が

$$\mathcal{E}(\iota \circ \xi) = \frac{n}{2}\mathrm{Vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \|S_\xi\|^2 dv_g$$

と表せることからも分かるように，明らかに，M が全測地的ならば，$\iota \circ \xi$ は弱安定な調和切断である．そこで，

"平均曲率一定超曲面 M で $\iota \circ \xi$ が弱安定な調和切断となるものは何か？"

ということを考える．

長さが 1 のベクトル $a \in \mathbf{R}^{n+2}$ と $0 \leq s < 1$ である実数 s に対して，

$$\Sigma^n(s) = \{x \in S^{n+1}(1) | < x, a >= s\}$$

とおく．ここで, $< \cdot, \cdot >$ は $\mathbf{R}^{n+2}$ の標準内積である．$\Sigma^n(s)$ は $S^{n+1}(1)$ 内の平均曲率一定超曲面であるが，その単位法ベクトル場 ξ に対して，$\iota \circ \xi$ が弱安定であることの必要十分条件は $(n-1)s^2 \leq 1$ であることが示せる．ここでは，$(n-1)s^2 \leq 1$ を満たす $\Sigma^n(s)$ を弱安定な小円とよぶ．

定理 4.1. M をコンパクト，向き付け可能，連結な $S^{n+1}(1)$ 内の $\|h\|$ が一定な平均曲率一定超曲面とする．単位法ベクトル場 ξ に対して，$\iota\circ\xi$ が弱安定であり，$n \geq 4$ ならば，M は $s = \sqrt{\|h\|^2/(n+\|h\|^2)}$ である弱安定な小円 $\Sigma^n(s)$ である．

参考文献

[1] O. Gil-Medrano, Relationship between volume and energy of vector fields, Differential Geom. Appl., 15 (2001), 137-152.

[2] J. C. Gonzàlez-Dàvila and L. Vanhecke, Energy and volume of unit vector fields on three-dimensional Riemannian manifolds, Differential Geom. Appl., 16 (2002), 225-244.

[3] K. Tsukada and L. Vanhecke, Minimal and harmonic unit vector fields in $G_2(\mathbf{C}^{m+2})$ and its dual space, Monatsh. Math., 130 (2000), 143-154.

[4] K. Tsukada ans L. Vanhecke, Minimality and harmonicity for Hopf vector fields, Illinois J. Math. 45 (2001), 441-451.

[5] G. Wiegmink, Total bending of vector fields on Riemannian manifolds, Math. Ann., 303 (1995), 325-344.

[6] C. M. Wood, The energy of Hopf vector fields, Manuscripta Math., 101 (2000), 71-88.

〒 162-8601 東京都新宿区若宮町 26
東京理科大学理学部数学科
e-mail:kazuhase@rs.kagu.tus.ac.jp