Willmore曲面の臍点について

安藤　直也 (熊本大学理学部数理科学科)

本講演の目的は次の定理を報告することである:

定理 ([An]) S を $\mathbf{R}^3$ にはめこまれた Willmore 曲面とし, p_0 を S の孤立臍点とする. このとき S 上での p_0 の指数は 1/2 以下である.

$\mathbf{R}^3$ の曲面 S が Willmore である とは, S が Willmore 汎関数の停留曲面であるときにいう, 但し Willmore 汎関数 とは曲面に対しその平均曲率の 2 乗の積分を対応させるものである. S が Willmore 曲面であることと S が次の偏微分方程式を満たすことは同値である ([C]):

$$\left\{\Delta + 2\left(H^2 - K\right)\right\}H = 0, \tag{1}$$

但し Δ は S 上の Laplacian でありまた K および H はそれぞれ S の Gauss 曲率および平均曲率である. (1) は Willmore 曲面に対する Euler-Lagrange 方程式である.

Weiner は S^3 の極小曲面の立体射影による像は $\mathbf{R}^3$ の Willmore 曲面であることを示した ([W]). 射影平面と同相ではないコンパクトな 2 次元多様体に対し, その S^3 への極小はめこみが存在する ([L]); 一方で射影平面の S^3 への極小はめこみは存在しない ([Al]). よって射影平面と同相ではないコンパクトな 2 次元多様体を $\mathbf{R}^3$ の中に Willmore 曲面としてはめこむことができることがわかる. Pinkall は S^3 の中でいかなる極小曲面とも共形同値ではない Hopf トーラスで立体射影による像が Willmore 曲面であるものを見い出した ([P]). さらに Kusner は射影平面に同相な Willmore 曲面を見い出した ([K]).

Kusner による Willmore 射影平面の例は $\mathbf{R}^3$ の中の極小曲面を反転でうつすことによって得られる. そのような極小曲面のうちの一つは臍点を唯一つ有しまた end をちょうど三つ有する. 以下この極小曲面を S とする. S の end は全てうめこまれていてそして平坦 (flat) である. 反転によって, 臍点 (および非臍点) は臍点 (および非臍点) にうつされまた S のそれぞれの end は像において臍点に対応する (各 end はうめこまれていてかつ平坦であることから, 各 end の反転による像はある滑らかな曲面片から臍点を一つを取り除いたものであることがわかる). よって S の像のコンパクト化 S_0 は臍点を全部で四つ有する. S の end に対応する S_0 の臍点を p_1, p_2, p_3 とし, S の唯一つの臍点の像を p_4 とする. このとき Hopf-Poincaré の定理によると, これら 4 点の指数の和は射影平面の Euler 数である 1

に等しい:

$$\mathrm{ind}_{p_1}(S_0)+\mathrm{ind}_{p_2}(S_0)+\mathrm{ind}_{p_3}(S_0)+\mathrm{ind}_{p_4}(S_0)=1. \tag{2}$$

よって四つの孤立臍点の指数のうち正のものが存在することがわかる. よって定理において与えられた Willmore 曲面上の孤立臍点の指数についての評価は最良であることがわかる. また極小曲面の孤立臍点の指数は $-1/2$ 以下であることと反転によって孤立臍点の指数は不変であることから, $\mathrm{ind}_{p_4}(S_0)\leqq -1/2$ を得る. このことと定理および(2) から,

$$\mathrm{ind}_{p_1}(S_0)=\mathrm{ind}_{p_2}(S_0)=\mathrm{ind}_{p_3}(S_0)=1/2, \qquad \mathrm{ind}_{p_4}(S_0)=-1/2$$

を得る.

以下において定理の証明の概略を描写する. f は $\mathbf{R}^2$ における $(0,0)$ の近傍上で定義された滑らかな関数で次を満たすとする:

(a) $f(0,0)=(\partial f/\partial x)(0,0)=(\partial f/\partial y)(0,0)=0$;

(b) $\mathbf{R}^3$ の原点 $o:=(0,0,0)$ は f のグラフ G_f の孤立臍点である;

(c) G_f は Willmore 曲面である.

さらに $\mathbf{R}^3\cup\{\infty\}$ の共形変換によって Willmore 曲面は Willmore 曲面にうつされることと曲面の主方向は主方向にうつされることに注意すると, $(0,0)$ での f の全ての 2 階の偏微分係数は 0 であると仮定してよい:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0.$$

このとき(1) から, 3 以上の整数 $k_f\geqq 3$ および恒等的に零ではない k_f 次同次多項式 $g_f\not\equiv 0$ が存在して f は

$$f=g_f+o\Big(\big(x^2+y^2\big)^{k_f/2}\Big)$$

と表されることがわかる. さらに(1) から, g_f は $\Delta_0^2 g_f\equiv 0$ を満たすことがわかる, ただし $\Delta_0:=\partial_x^2+\partial_y^2$ である. このとき g_f に対し, 次数がそれぞれ k_f および k_f-2 の球面調和関数 h_{k_f}, h_{k_f-2} が存在して g_f は

$$g_f=h_{k_f}+\big(x^2+y^2\big)h_{k_f-2} \tag{3}$$

と表される. 同次多項式 g_f および実数 $\theta\in\mathbf{R}$ に対し, $\tilde{g}_f(\theta):=g_f(\cos\theta,\sin\theta)$ とおく. このとき(3) から, $\tilde{g}_f$ は

$$\cos k_f\theta, \quad \sin k_f\theta, \quad \cos(k_f-2)\theta, \quad \sin(k_f-2)\theta$$

の1次結合によって表されることがわかる. よって $[\theta,\theta+\pi)$ の中の $\tilde{g}_f$ の零点の数は k_f-2 以上 k_f 以下であり, $[\theta,\theta+\pi)$ の中の $d\tilde{g}_f/d\theta$ の零点の数は $\tilde{g}_f$ の零点の数以上 k_f 以下であることがわかる. G_f 上での o の指数を調べるために, 次の三つの場合を考える必要がある:

(a) 任意の $\theta\in\mathbf{R}$ に対し, $(\cos\theta,\sin\theta)$ での g_f の Hessian は単位行列の定数倍とは表されない;

(b) 任意の $\theta\in\mathbf{R}$ に対し $(\cos\theta,\sin\theta)$ での g_f の Hessian は零行列ではないが, ある $\theta_0\in\mathbf{R}$ に対し $(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$ での g_f の Hessian は単位行列の零ではない定数倍と表される;

(c) ある $\theta_0\in\mathbf{R}$ に対し, $(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$ での g_f の Hessian は零行列である.

まず (a) の場合を考える. このとき o の指数 $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f)$ は次を満たす:

$$\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f)\leqq 1-\frac{N^C_{g_f,+}-N^C_{g_f,-}}{2}, \tag{4}$$

但し

$$N^C_{g_f,+}:=\sharp\big\{R^C_{g_f,+}\cap[\theta,\theta+\pi)\big\},\qquad N^C_{g_f,-}:=\sharp\big\{R^C_{g_f,-}\cap[\theta,\theta+\pi)\big\}$$

であり,

(i) $R^C_{g_f,+}$ は $\tilde{g}_f=0$ を満たす $\tilde{g}_f$ の停留点, $\tilde{g}_f$ が正の極大値をとる点および負の極小値をとる点全体からなる集合であり,

(ii) $R^C_{g_f,-}$ は $\tilde{g}_f$ が負の極大値または正の極小値をとる点全体からなる集合である.

$[\theta,\theta+\pi)$ の中の $\tilde{g}_f$ および $d\tilde{g}_f/d\theta$ の零点の数に注意することで,

$$\left(N^C_{g_f,+},N^C_{g_f,-}\right)\in\{(k_f-2,0),\ (k_f-1,1),\ (k_f,0)\}$$

が成り立つことがわかる. さらに $k_f\geqq 3$ であるので, (4) を用いて $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f)\leqq 1/2$ を得る. 次に (b) の場合を考える. このとき $\left(N^C_{g_f,+},N^C_{g_f,-}\right)=(k_f-1,1)$ であり, $[\theta,\theta+\pi)$ の中の $R^C_{g_f,-}$ の唯一つの元 θ_s に対し $(\cos\theta_s,\sin\theta_s)$ での g_f の Hessian が単位行列の零ではない定数倍と表される. このとき o の指数 $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f)$ は次を満たす:

$$\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f)=1-\frac{k_f-1}{2}+\frac{1}{2\pi}(\Gamma_{f,o}(\theta_s)+\Gamma_{f,o}(\theta_s+\pi)), \tag{5}$$

但しこの場合 $\Gamma_{f,o}$ は

$$\Gamma_{f,o}\in\{-\pi/2,\ 0,\ \pi/2\} \tag{6}$$

を満たす．よって

$$\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f) \leqq 2 - \frac{k_f}{2}$$

が成り立つことがわかり，$k_f \geqq 3$ であるので $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f) \leqq 1/2$ を得る．最後に (c) の場合を考える．このとき $\left(N^C_{g_f,+}, N^C_{g_f,-}\right) = (k_f - 1, 0)$ であり，$[\theta, \theta+\pi)$ の中に $R^C_{g_f,+}$ の元 θ_s で $(\cos\theta_s, \sin\theta_s)$ での g_f の Hessian が零行列であるようなものが唯一つ存在する．このとき o の指数 $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f)$ は(5) の中でのように表される．そしてこの場合にも $\Gamma_{f,o}$ は(6) を満たす．よって (b) の場合と同様に $\mathrm{ind}_o(\mathsf{G}_f) \leqq 1/2$ を得る．

参考文献

[Al] F. J. Almgren, Jr., Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, Ann. of Math. **85** (1966) 277–292.

[An] N. Ando, An isolated umbilical point of a Willmore surface, to appear in Osaka J. Math.

[C] B.-Y. Chen, On a variational problem on hypersurfaces, J. London Math. Soc. (2) **6** (1972/1973) 321–325.

[K] R. Kusner, Comparison surfaces for the Willmore problem, Pacific J. Math. **138** (1989) 317–345.

[L] H. B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. **92** (1970) 335–374.

[P] U. Pinkall, Hopf tori in S^3, Invent. Math. **81** (1985) 379–386.

[W] J. L. Weiner, On a problem of Chen, Willmore et alia, Indiana University Math. J. **27** (1978) 19–35.

〒 860-8555 熊本市黒髪 2–39–1

熊本大学理学部数理科学科

E-mail address: ando@math.sci.kumamoto-u.ac.jp