アフィン対称空間入門

金行　壮二
日本工業大学工学部

本稿は今般の研究集会での小生の三回の講演の原稿に手を加え、多少加筆して纏めたものである。標題にいうアフィン対称空間とは半単純リー群の対称商空間であってその固定部分群がコンパクトとは限らないものである。半単純型のリーマン対称空間及び半単純リー群自身はこのアフィン対称空間の範疇に属する。

第I部はアフィン対称空間についての一般的な話（generalities）であり、研究の道具も兼ねている。第II部は各論であり、夫々のアフィン対称空間の類に対して、そのリー環論的構成法及び今迄なされた又はなされつつある幾何学的研究について述べ、問題提起も行った。

歴史的に見ると、非コンパクト半単純リー群の表現論、調和解析の発展の過程においてリーマン対称空間のみでは足りず、アフィン対称空間の登場が不可欠であった。そしてアフィン対称空間がそれらの分野に登場して２５年余が経過した。しかし幾何学者の側からの研究は未だ少なく、従ってアフィン対称空間は群論的幾何の未開拓の新しい対象と云えるであろう。本稿がきっかけとなり今後アフィン対称空間に興味を持つ人が殖え、その研究が盛んになれば幸いである。

最後にこの研究集会でアフィン対称空間について話をする機会を与えて頂き、終始お世話になった間下克哉氏と田崎博之氏に厚く感謝したいと思う。

目 次

第I部　アフィン対称空間の基本事項 1

1　分類の話 1

2　半単純対称対の構造論 3

3　分裂ルート系 6

第II部　各論 8

1　随伴軌道の幾何構造　8

2　複素リー群のスタイン対称空間　9

3　K_ε 型対称空間　10

4　エルミート型スタイン対称空間　12

5　既約擬エルミート対称空間　13

6　バイ・ラグランジュ対称空間　16

7　因果的対称空間と順序付対称空間　19

8　ω 領域ー不定値ヘッセ計量を持つアフィン対称領域ー　24

第I部
アフィン対称空間の基本事項

1　分類の話

定義 1.1 G を連結リー群、H を G の閉部分群、σ を G の対合（回帰的自己同型）とする。この時 (G, H, σ) 又は (G, H) が **対称対** とは、σ で固定される G の元のなす部分群を G_σ とし、その単位元の連結成分を G_σ^0 で表わす時、次の２条件が成立つ事である：
(1) $G_\sigma^0 \subset H \subset G_\sigma$
(2) (G, H) は概効果的である。即ち G の正規部分群で H に含まれるものは離散的である。

上の (1)、(2) が充される時、商空間 G/H は**アフィン対称空間**という、特に H がコンパクトの時、リーマン対称空間という。対称対 (G, H, σ) に対して、G 及び H のリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし ($i.e.$ $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}H$)、これが引起こすリー環の対称対を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ とする。これを対称リー環ともいう。この場合 $\mathfrak{g}$ は σ の１固有空間 $\mathfrak{h}$ と (-1)-固有空間 $\mathfrak{m}$ との和として表わされる：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \underset{\sigma}{+} \mathfrak{m}.$$

定理 1.2 (Berger [1], Kobayashi-Nomizu [2]) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ を対称対とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$ を $\mathfrak{g}$ の Levi 分解とする、ここに $\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の σ 不変な半単純部分環、$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ の根基

である。この時次の様な対称対の完全系列が成立つ：

$$0 \to (\mathfrak{r}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}, \sigma') \to (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma) \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, \mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}, \sigma^*) \to 0,$$

そして第三の対称対は対称対 $(\mathfrak{s}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \sigma'')$ に同型である。ここに σ'、σ'' は σ の $\mathfrak{r}$ 及び $\mathfrak{s}$ 上への制限であり、σ^* は σ が引起こす $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 上の対合である。

この定理により対称対の考察は $\mathfrak{g}$ が半単純な場合と可解な場合に分離され各々独立に考察する事が可能になる。ここで Berger [1] と Koh [3] による Berger の束化について述べておこう。

定理 1.3 (G, H, σ) を対称対とし、K を σ 不変な G の極大コンパクト部分群とする。この時アフィン対称空間 G/H はコンパクト対称空間 $K/K \cap H$ 上の、標準ファイバーがユークリッド空間に微分同型な、ファイバー束の構造を持つ。

この定理よりアフィン対称空間の位相的性質はコンパクトリーマン対称空間のそれに帰着される事がわかる。

半単純アフィン対称空間の局所同型の下での分類はリー環の半単純対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ の分類と同値であり Berger [1]　により分類された。その分類はリーマン対称対の場合と同じく

(イ) $\mathfrak{g}$ が単純な場合

(ロ) $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, diagonal), \mathfrak{g}$ は単純

という２つの場合に帰着される。(ロ) の場合からすべての単純リー環が得られる。(イ) の場合の対称対の分類は、各実単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g}$ の対合を $\mathfrak{g}$ の自己同型群 Aut$\mathfrak{g}$ の下での共役を除いて分類する事に帰着される。Aut$\mathfrak{g}$ 自身は村上 [6] により決定されていたので、それを用いて Berger は $\mathfrak{g}$ の対合 σ と、対応する部分環 $\mathfrak{h}$ の分類を完成した。分類表は５ページにも及ぶ厖大な物である。そこに於ける対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の列挙の方法はやや無秩序なので、より整然とした配列の仕方を以下に述べよう。

定義 1.4 $\mathfrak{g}$ を、その複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ が複素単純なる様な実単純リー環とする。対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ の **複素化** (又は **親**) とは複素対称対 $(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}, \widetilde{\sigma})$　の事である。ここに $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$ は $\mathfrak{h}$ の複素化、$\widetilde{\sigma}$ は σ を $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 上へ複素線型に拡張して得られる $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$　の対合である。又複素対称対 $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \bar{\mathfrak{h}}_1, \bar{\sigma}_1)$ に対して対称対 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \sigma_1)$ がその **実形**（又は **子**）であるとは，$(\bar{\mathfrak{g}}_1, \bar{\mathfrak{h}}_1, \bar{\sigma}_1)$ が $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \sigma_1)$ の親なる事である。

既約リーマン対称対から出発しその親を考え更にそのすべての子を考えると、元のリーマン対称対とその双対の他にいくつかのアフィン対称対が現れる。すべての既約リーマン対称対に対して、その親と子を合せるとそれですべてのアフィン対称対が得られるのである。本稿の末尾に古典型の単純対称対の親子関係による分類表を掲げておいた。

2　半単純対称対の構造論

2.1

この節では与えられた対称対の「アフィン双対」「同伴」「双対」と呼ばれる対称対について述べよう。通常これらは夫々「双対」「同伴」「c 双対」と言われているが、リーマン対称対での双対はc 双対と同じ意味なので、ここではc 双対を単に双対と呼び、その代わりにアフィン対称対での「双対」はアフィン双対という事にする。この節の基本的な文献は、Berger [1], Loos [4], 大島一関口 [7] である。先ず次の定理が出発点であるが、証明は [1] [4] を見られたい。

定理 2.1 $\mathfrak{g}$ を半単純リー環、σ を $\mathfrak{g}$ の任意の対合とする。この時 σ と可換な $\mathfrak{g}$ のカルタン対合 τ が存在する。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ を実単純対称対、τ を σ と可換な $\mathfrak{g}$ のカルタン対合とする。この時 $\mathfrak{g}$ は σ 及び τ により次の様に固有空間分解される：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \underset{\sigma}{+} \mathfrak{m} = \mathfrak{k} \underset{\tau}{+} \mathfrak{p}, \tag{2.1}$$

$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{k}$ は σ と τ の１固有空間であり、$\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{p}$ は σ と τ の（－１）固有空間である。σ と τ の可換性より $\mathfrak{g}$ は次の様に固有空間の共通部分の和になる：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\mathfrak{k} + \mathfrak{m}_\mathfrak{k} + \mathfrak{h}_\mathfrak{p} + \mathfrak{m}_\mathfrak{p} \tag{2.2}$$

これを (σ, τ) 分解という。ここに $\mathfrak{h}_\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}_\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}$ である。明らかに次の式が成立つ：

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{h}_\mathfrak{k} + \mathfrak{h}_\mathfrak{p}, \;\; \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\mathfrak{k} + \mathfrak{m}_\mathfrak{p}, \\ \mathfrak{k} &= \mathfrak{h}_\mathfrak{k} + \mathfrak{m}_\mathfrak{k}, \;\; \mathfrak{p} = \mathfrak{h}_\mathfrak{p} + \mathfrak{m}_\mathfrak{p}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ から出発して次の６個の対称対が得られる：

表１

リー環	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,-1)$	対称対	対合の対
$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$	$\mathfrak{m}_\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$	$\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$	$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$	(σ, τ)
$\mathfrak{g}^a$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$	$\mathfrak{m}_\mathfrak{k}$	$\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$	$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^a)$	$(\sigma\tau, \tau)$
$\mathfrak{g}^d$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$	$i\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$	$i\mathfrak{m}_\mathfrak{k}$	$\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$	$(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^d)$	$(\widetilde{\tau}, \widetilde{\sigma})$
$\mathfrak{g}^{ad}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$	$i\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$	$i\mathfrak{m}_\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$	$(\mathfrak{g}^{ad}, \mathfrak{h}^d)$	$(\widetilde{\tau}, \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})$
$\mathfrak{g}^{ada}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$	$i\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$	$i\mathfrak{m}_\mathfrak{k}$	$(\mathfrak{g}^{ad}, \mathfrak{h})$	$(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})$
$\mathfrak{g}^{da}$	$\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$	$i\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$	$\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$	$i\mathfrak{m}_\mathfrak{k}$	$(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^a)$	$(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}, \widetilde{\sigma})$

上の表１について若干説明して置こう。第１行については (2. 2), (2, 3) と照らし合わせると意味する事は明瞭であろう。つまり第１行左端の $\mathfrak{g}$ は第２列―第５列の部分環乃至は部分空間の直和である。そしてこの直和としての表示は右端に与えられた対合の対 (σ, τ) による分解である。各列の上に付された $(1,1)$, $(-1,1)$ 等は夫々の部分空間上で取る (σ, τ) の値である。以上の事は他の行のリー環についても同様である。第１列の６つのリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^a, \mathfrak{g}^d$ ……等はどれも複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の実形である。$\widetilde{\sigma}$ 、$\widetilde{\tau}$ は $\mathfrak{g}$ の対合 σ 、τ を $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 上へ複素線型に拡張して得られる $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の対合の夫々の実形への制限を表わす。尚リー環としては次の一致が成立つ：

$$\mathfrak{g}^a = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{da} = \mathfrak{g}^d,\ \mathfrak{g}^{ada} = \mathfrak{g}^{ad}.$$

又、表１の１つの行において第２列と第４列の部分空間の和はその対称対の isotropy 環になっている。例えば

$$\mathfrak{h}^a := \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}},\ \ \mathfrak{h}^d := \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + i\mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}$$

は夫々$\mathfrak{g}^a$ 、$\mathfrak{g}^d$ の対合 $\sigma\tau$ 及び $\widetilde{\tau}$ に対応する isotropy 環である。対称対 $(\mathfrak{g}^a, \mathfrak{h}^a) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^a)$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**同伴**という。$(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^d)$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**アフィン双対**という。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ と $(\mathfrak{g}^{ada}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}^{ad}, \mathfrak{h})$ は isotropy 環は同じで補空間は互いに他方の i 倍になっている。この２つは互いに**双対**であるという。６つの対称対の間の関係を図示すると次の様になる：

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{g}^a, \mathfrak{h}^a) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] \arrow[d, dash, "\text{assoc.}"'] & (\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^a) \arrow[d, dash, "\text{aff.dual}"] \\
(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] \arrow[d, dash, "\text{aff.dual}"'] & (\mathfrak{g}^{ad}, \mathfrak{h}) \arrow[d, dash, "\text{assoc.}"] \\
(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^d) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] & (\mathfrak{g}^{ad}, \mathfrak{h}^d)
\end{tikzcd}$$

実例を掲げよう：

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{sl}(p+q, \mathbf{R}), \mathfrak{so}(p,q)) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] \arrow[d, dash, "\text{assoc.}"'] & (\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{so}(p,q)) \arrow[d, dash, "\text{aff.dual}"] \\
(\mathfrak{sl}(p+q, \mathbf{R}), \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(p, \mathbf{R}) + \mathfrak{gl}(q, \mathbf{R})) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] \arrow[d, dash, "\text{dual}"'] & \text{同左} \arrow[d, dash, "\text{assoc.}"] \\
(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{so}(p,q)) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] & (\mathfrak{sl}(p+q, \mathbf{R}), \mathfrak{so}(p,q)).
\end{tikzcd}$$

(表１) において対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の兄弟 (親が同じ) であるリーマン対称対は $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{k}^d)$ で与えられる。ここに $\mathfrak{k}^d := \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + i\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{g}$ の極大コンパクト部分環である。$(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{k}^d)$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**リーマン双対**といい、表現論でよく用いられる。

半単純アフィン対称空間は必ず擬リーマン対称空間になる。実際、G/H を (表１) の $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対応するアフィン対称空間とすると、G/H は $\mathfrak{g}$ のキリング形式から来る符号数が $(\dim \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}, \dim \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}})$ の擬リーマン計量を持つ。この擬リーマン計量についての幾何学的性質、部分多様体論等は未知である。同伴、アフィン双対、双対との間の幾何学的関係もわかっていない。

2.2

この節では半単純リー群の Mostow 分解 ([5]) と Berger の束化 ([1] [4]) について述べよう。

定理 2.2 ([5]) G を中心が有限な連結半単純リー群とし、(G, H, σ) を対称対、τ を σ と可換な G のカルタン対合とする。K を τ で固定される元のなす G の極大コンパクト部分群とする。この時、(2.2) の記号の下で次の事が成立つ：
１）写像 $\varphi : K \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \to G$ を

$$\varphi(k, X, Y) = k\ \exp X \exp Y,\ \ k \in K, X \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}, Y \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}},$$

により定義すると φ は G の上への C^ω 微分同型である。特に

$$G = K\ \exp \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} \exp \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$$

が成立つ。これを G の Mostow 分解という。
２）φ の $(K \cap H) \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ 上への制限は $(K \cap H) \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ から H の上への C^ω 微分同型である。特に H のカルタン分解

$$H = (K \cap H) \exp \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$$

が成立つ。
３）$(K, K \cap H, \sigma)$ はコンパクトリーマン対称対であり、アフィン対称空間 G/H は $(K/K \cap H) \times \exp \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ に C^ω 微分同型になる ([1])。

3　分裂ルート系

この節では半単純対称対に対して普遍的に用いられる分裂ルート系（制限ルート系ともいう）なる物について述べよう。このルート系は Rossmann [8] によって導入され、大島一関口 [7] により整備され、各単純対称対に対してその分裂ルート系が決定されている。

半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の可換部分環 $\mathfrak{a}$ が分裂型 (split) とは $\mathfrak{g}$ が $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{a}$ の固有空間（i.e. ルート空間）の和に分解する事である。この事は $\mathfrak{a}$ の任意の元が $\mathfrak{g}$ の双曲元になるという事と同値である。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ を半単純対称対とし、$\mathfrak{g}$ の分解 (2.1) を考える。部分空間 $\mathfrak{m}$ は一般に双曲元以外の元を含むので、$\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間は分裂型になるとは限らない。しかし $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ の極大可換部分空間とすると $\mathfrak{a}$ は分裂型になる。$\mathfrak{m}$ の任意の分裂型極大可換部分空間は $\mathfrak{h}$ が生成する群の作用でこの $\mathfrak{a}$ に共役になる（[8]）。

定義 3.1 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ の１つの極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ の**分裂カルタン部分環**という。$\mathfrak{a}$ の次元を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ の**分裂階数**という。

$\mathfrak{a}$ 上の１次形式 λ に対して

$$\mathfrak{g}^{\lambda} := \{Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] = \lambda(X)\, Y,\ X \in \mathfrak{a}\}$$

とおく。 $\mathfrak{g}^{\lambda} \neq (0)$ の時、λ を（$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する）分裂ルートという。

定理 3.2 ([7] [8]) $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ のゼロでない分裂ルートの集合とすると、$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ はルート系の公理を充たす（これを対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ の分裂ルート系という）。そして次の様な $\mathfrak{g}$ のルート空間分解が成立つ：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})} \mathfrak{g}^{\lambda}$$

ここに $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{g}$ での中心化環である。

例 3.3 対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma) = (\mathfrak{sl}(p+q, \mathbf{R}), \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(p, \mathbf{R}) + \mathfrak{gl}(q, \mathbf{R})), \sigma)$, $p \leq q$ を考えよう。$\mathfrak{h}$ は次の形の行列の全体である：

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, X_1 \in \mathfrak{gl}(p, \mathbf{R}), X_2 \in \mathfrak{gl}(q, \mathbf{R}), \mathrm{Tr}X_1 + \mathrm{Tr}X_2 = 0.$$

対合 σ は、$I_{p,q} = \mathrm{diag}(E_p, -E_q)$ （E_k は k 次単位行列）とする時、

$$\sigma(X) = I_{p,q} X I_{p,q},\ X \in \mathfrak{g}$$

で与えられる。 $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{m}$ は次の形の行列より成る：

$$\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}, X \in M_{p,q}(\mathbf{R}),\ Y \in M_{q,p}(\mathbf{R})$$

σ と可換な $\mathfrak{g}$ のカルタン対合 τ は $\tau(X) = -{}^t X$ で与えられる。$\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(p+q)$ であり、$\mathfrak{p}$ は跡ゼロの $p+q$ 次実対称行列の空間である。$\mathfrak{g}$ の (σ, τ) 分解の各部分空間は次の通りである：

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} : A \in \mathfrak{o}(p), D \in \mathfrak{o}(q) \right\},$$

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{k}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -{}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix} : X \in M_{q,p}(\mathbf{R}) \right\},$$

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} : {}^tA = A, {}^tD = D, \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}D = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix} : X \in M_{q,p}(\mathbf{R}) \right\}$$

更に

$$\mathfrak{a} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix} : X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in M_{q,p}(\mathbf{R}) \right\}$$

は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ の分裂カルタン部分環になる。分裂ルート系は $p < q$ の時、

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm(\lambda_i \pm \lambda_j)(1 \leq i \leq j \leq p); \pm 2\lambda_i, \pm\lambda_i(1 \leq i \leq p)\}$$

となり、BC_p 型である。$p = q$ の時は $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は上の式で $\pm\lambda_i$ を除外したものになり、C_p 型である。

最後に半単純対称空間に伴う G の両側剰余類分解（Rossmannn の分解）について述べておこう。

定理 3.4 ([8]) G/H を半単純対称空間とし、対応する対称対を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ とし、$\mathfrak{g}$ の (σ, τ) 分解 (2.2) を考える。K を $\mathfrak{k}$ が生成する G の極大コンパクト部分群とし、$\mathfrak{a}$ を分裂カルタン部分環とし $A := \exp\mathfrak{a} \subset G$ とする。この時、次の G の分解が成立つ：

$$G = KAH.$$

この分解はリーマン対称空間での分解 $G = KAK$ の半単純対称空間への拡張である。　これは G の Mostow 分解と分裂カルタン部分環の共役性から得られる。

第 II 部
各論

1 随伴軌道の幾何構造

まず半単純対称空間達の間で随伴軌道としての実現を許容するものは重要な類をなす。そこで随伴軌道に入る幾何構造について簡単にふれておこう。G を半単純リー群とする。G はそのリー環 $\mathfrak{g}$ に随伴表現を通じて作用している。この時の１つの G 軌道を随伴軌道と言う。元 $X \in \mathfrak{g}$ を通る随伴軌道は商空間として $G/C(X)$ と表され、又逆も成り立つ。ここに $C(X)$ は X の G での中心化群である。元 $X \in \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$ の半単純元とは $\mathfrak{g}$ の一次変換 $\operatorname{ad} X$ が $\mathbb{C}$ 上で対角化可能なることである。半単純元 X の G 軌道を**半単純軌道**という。半単純元 $X \in \mathfrak{g}$ が楕円元とは $\operatorname{ad} X$ の固有値がすべて純虚数になる事である。X が双曲元とは $\operatorname{ad} X$ の固有値がすべて実数になる事である。楕円元の G 軌道を**楕円軌道**、双曲元の G 軌道を**双曲軌道**という。コンパクト群の随伴軌道は常に楕円軌道である。

半単純リー群の楕円軌道及び双曲軌道を幾何学的に特徴付けよという問題は興味深い問題である。楕円軌道に対してはこの問題は Dorfmeister-Guan [9], 小林-小野 [10] により解決された。即ち $X \in \mathfrak{g}$ の随伴軌道 $G/C(X)$ が楕円軌道である必要十分条件は $G/C(X)$ は擬ケーラー等質空間になることである。さらにこの場合 $G/C(X)$ は G の複素化 $G^{\mathbf{C}}$ の旗多様体の中に開 G 軌道として正則に埋め込まれる（[9], [10]）。双曲軌道に対しては Hou-Deng-金行-西山 [23] により解決された。随伴軌道 $G/C(X)$ が双曲軌道なるための必要十分条件は $G/C(X)$ がバイ・ラグランジュ等質空間（パラケーラー等質空間ともいう）という等質シンプレクティック多様体になることである。この場合 $G/C(X)$ は、$C(X)$ をレビ部分群として持つ２つの放物型部分群による G の２つの旗多様体の直積内に同変且稠密に埋め込まれる（[24]）。

2 複素リー群のスタイン対称空間

非コンパクトリーマン対称空間 $M = G/K$ を考える。ここに G は複素単純でない実単純リー群でその中心は有限とする。そして K は G の極大コンパクト部分群とする。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \tau)$ を対応するリー環の対称対とする。τ は $\mathfrak{g}$ のカルタン対合である。G の複素化 $G^{\mathbf{C}}$ は複素単純で G を含む様にとれる。$K^{\mathbf{C}}$ （$\subset G^{\mathbf{C}}$）を K の複素化とする。商空間 $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ は複素アフィン対称空間であり松島の定理 [12] からスタイン等質空間でありしかもアフィン代数多様体になる。M は $M^{\mathbf{C}}$ 内にその実部として埋め込まれている（つまり $M^{\mathbf{C}}$ は M の複素化）。$G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ に対するリー環の対称対は $(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbf{C}}, \widetilde{\tau})$ である、ここに $\widetilde{\tau}$ は τ の $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 上への $\mathbf{C}$-線形

拡張である。

定義 2.1 スタイン対称空間 $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ が**エルミート型**であるとは、G/K がエルミート対称空間となることである。

エルミート型スタイン対称空間についてはセクション 3 で述べるので、ここではエルミート型と限らない場合の研究について述べよう。第 1 は De Concini と Procesi [14] による $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ の"wonderful コンパクト化" X の構成である。ここに X は $G^{\mathbf{C}}$ が作用するコンパクト複素多様体であって $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ に同型な唯一の開 $G^{\mathbf{C}}$ 軌道を持ち、X 内のすべての $G^{\mathbf{C}}$ 軌道の閉包は滑らかな部分多様体になるという性質をもつ。De Concini-Procesi はこのコンパクト化 X と $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ の代数幾何学的性質及び可換環論的性質を研究している。

第 2 は H.Azad と小林亮一 [11] の研究である。それによるとスタイン対称空間 $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ は K 不変なリッチ平坦な完備ケーラー計量を持つこと、更に $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ がエルミート型のときはこの計量は超ケーラー計量になることがわかっている。この計量に関する $G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ の幾何学的性質を調べることは今後の問題になり得ると思われる。

第 3 は S.Gindikin 達によるリーマン対称空間 G/K の複素冠（complex crown）の研究である。この方面の研究の進展の概説は Gindikin 自身による解説 [13] で知ることができる。この研究は $M = G/K$ 上のすべての G 不変微分作用素の同時固有函数達即ち M 上のすべての球函数を一斉に $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ 内で複素解析的に延長できる最大の領域を決定するという調和解析的な動機に端を発する。そのような領域は M の G 不変なスタイン近傍になるはずであり、そのもっとも有力な候補が M の**複素冠**というものである。それは次のように定義される。$\mathfrak{g}$ のカルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \underset{\tau}{+} \mathfrak{p}$ を考え、$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環とし $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ に関するルート系とする。$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ の部分集合 Ω を次式により定義する：

$$\Omega = \{X \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} : |\alpha(X)| < \frac{\pi}{2},\ \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})\}.$$

Ω は $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ 内の凸多面体になる。この時 M の複素冠 Ξ は

$$\Xi := G \exp(i\Omega) K^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$$

で定義される。Ξ は $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ 内で M を含む G 不変な領域になる。他方 Ξ は J.Wolf [15] による cycle space とも関連しており意味深長で興味をそそられる領域である反面かなり面倒な領域でもある。例えば Ξ は G より大きい群の等質領域になることもあるが一般には等質ではない。現在 Ξ について 2 つの方向から特徴づけの研究がなされている。

他方 Ξ のシロフ境界 $\partial_s\Xi$ （これは一般には連結ではない）についての研究は Gindikin-Krötz [16] によりなされ、非コンパクト型因果構造を持つ対称空間は、ある複素冠 Ξ のシロフ境界 $\partial_s\Xi$ の 1 つの連結成分として必ず現れることが明らかになっている。この種の対称空間については II.7 を参照されたい。

3　K_ε 型対称空間

K_ε 型対称空間は大島-関口 [18] により導入され分類もされた。$\mathfrak{g}$ を非コンパクト単純リー環とする。K_ε 型をきめる $\mathfrak{g}$ の対合は $\mathfrak{g}$ のカルタン対合と $\mathfrak{g}$ のルートの符号なるものを用いて定義される対合との合成対合として与えられる。ここではルートの符号の代わりに $\mathfrak{g}$ の階別付を用いて K_ε 型の対合を導入しよう。この方法は金行 [17] による。まず階別リー環に伴う言葉を用意しておく。$\mathfrak{g}=\sum_{k=-\nu}^{\nu}\mathfrak{g}_k$ を第 ν 種の半単純 $\mathbf{Z}$-階別リー環（以後 GLA と略記）とする。元 $Z\in\mathfrak{g}_0$ がこの GLA の **特性元** とは $\mathrm{ad}\,Z$ の、各部分空間 $\mathfrak{g}_k$ 上への制限がスカラー作用素 $k1$ となることである。$\mathfrak{g}$ のカルタン対合 τ が階別反転とは $\tau(\mathfrak{g}_k)=\mathfrak{g}_{-k}, |k|\le\nu$ となることである。階別反転カルタン対合は常に存在し $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\exp\mathfrak{g}_0$ の元の共役を除いて一意に決まる。Z と τ の組をこの GLA の **associated pair** という。$\mathfrak{g}$ の自己同型 $\mathrm{Ad}\exp\pi iZ, i=\sqrt{-1}$ は $\mathfrak{g}_{2k}$ 上 1 、 $\mathfrak{g}_{2k-1}$ 上 -1 となる $\mathfrak{g}$ の対合になる。

定義 3.1 単純リー環 $\mathfrak{g}$ の対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\sigma)$ が K_ε **型** とは $\mathfrak{g}$ の第 ν 種の階別付 $\mathfrak{g}=\sum_{k=-\nu}^{\nu}\mathfrak{g}_k$ が存在して、その associated pair を (Z,τ) とする時、 σ が

$$\sigma=(\mathrm{Ad}\exp\pi iZ)\tau$$

と表せることである。そして GLA $\mathfrak{g}=\sum_{k=-\nu}^{\nu}\mathfrak{g}_k$ を K_ε 型対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\sigma)$ に **associate した GLA** という。

大島-関口による K_ε 型の対合の分類から、associate した GLA の次数 ν は 1 または 2 にとれる。

定義 3.2 K_ε 型の対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\sigma)$ が K_ε**I 型** とは associate した GLA の次数 ν が 1 となる事、又 K_ε**II 型**とは $\nu=2$ となる事である。

K_εI 型は 18 個存在し明確な幾何学的特徴づけができる。即ち K_εI 型は非コンパクト型の因果構造を持つ対称空間の類、或いは同値な事だが順序付対称空間の類と一致する事がわかる（II. 7 及び [17]）。K_εII 型は 33 個存在するが、現時点でこのタイプは全体としては幾何学的な共通点は見出せない。しかし K_εII 型で複素対称空間になるものはエルミート型の単純リー群の擬エルミート対称空間になるしその逆も成り立つ。K_εI 型、K_εII 型の対称空間の表は金行 [17] を参照されたい。尚 K_εI 型のリストは II.7.3 の表中の対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ で与えられている。

例 3.3 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(p+q,\mathbf{R})$ とする。元 $Z\in\mathfrak{g}$ を

$$Z=\mathrm{diag}\left(\frac{q}{p+q}1_p,-\frac{p}{p+q}1_q\right)$$

とする。$\mathrm{ad}\,Z$ による $\mathfrak{g}$ の固有空間分解は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 \tag{3.1}$$

で与えられる。ここに $\mathfrak{g}_k$ は $\mathrm{ad}\, Z$ の固有値 k の固有空間である。$\mathfrak{g}$ の各行列を上から p 行と q 行、左から p 列と q 列に区分けすると $\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$ は夫々次の形の行列からなる：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

(3.1) は Z を特性元とする GLA になる。また (3.2) より $\mathrm{Ad}\exp \pi i Z$ は $\mathfrak{g}_0$ 上で１，$\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_1$ 上で－１となる $\mathfrak{g}$ の対合であることがわかる。よって

$$(\mathrm{Ad}\exp \pi i Z)X = I_{p,q} X I_{p,q}, \quad X \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。I-例 3.3 のカルタン対合 τ は (3.1) に対して階別反転だから合成対合 $\sigma = (\mathrm{Ad}\exp \pi i Z)\tau$ は GLA(3.1) に付随する K_εI 型対合である。$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\sigma(X) = -I_{p,q}{}^t X I_{p,q}$ となるから $\sigma(X) = X \longleftrightarrow I_{p,q}X + {}^t X I_{p,q} = 0 \longleftrightarrow X \in \mathfrak{so}(p,q)$ となる。故に $(\mathfrak{sl}(p+q, \mathbf{R}), \mathfrak{so}(p,q), \sigma)$ は K_εI 型対称対である。

4　エルミート型スタイン対称空間

II.2 の非コンパクト対称空間 G/K がエルミート対称空間であるとしよう。この時 K はその中心である１次元トーラスの G での中心化群である。よって M の親 $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ において $K^{\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}^*$ の中心化群である。故に $M^{\mathbf{C}}$ は $G^{\mathbf{C}}$ の楕円軌道になり又双曲軌道としても実現される。G/K に対応するリー環の対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \tau)$ に対して，$\mathfrak{g}$ の τ によるカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \overset{\tau}{+} \mathfrak{p}$ とする。G/K の複素構造から引き起こされる $\mathfrak{p}$ 上の複素構造 J は $\mathfrak{k}$ の中心元 Z_0 を選んで $J = \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}} Z_0$ と表せる。$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の複素カルタン分解

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$$

において $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ は J の $\pm i$ -固有空間 $\mathfrak{p}^{\pm}$ の直和になる：$\mathfrak{p}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{p}^-$. そして $\bar{\mathfrak{g}}_{\pm 1} := \mathfrak{p}^{\pm}$, $\bar{\mathfrak{g}}_0 := \mathfrak{k}^{\mathbf{C}}$ とおくと $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ は GLA として

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \bar{\mathfrak{g}}_{-1} + \bar{\mathfrak{g}}_0 + \quad \bar{\mathfrak{g}}_1$$

と表せる。$G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ の原点 o での接空間を $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{g}}_{-1} + \bar{\mathfrak{g}}_1$ と同一視し、$B^{\mathbf{R}}$ は $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ を実リー環と見た時のキリング形式とする。$B^{\mathbf{R}}$ は $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ 上非退化であり、

$$B^{\mathbf{R}}(JX, JY) = B^{\mathbf{R}}(X, Y)\ , \ X, Y \in \mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$$

が成り立つ。よって $B^{\mathbf{R}}|_{\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}}$ は $M^{\mathbf{C}}$ 上の $G^{\mathbf{C}}$ 不変擬エルミット計量に拡張できる。又原点での $K^{\mathbf{C}}$ の線型 isotropy 表現は $\bar{\mathfrak{g}}_{\pm 1}$ を不変部分空間にもつ。以上から $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ は可約擬エルミート対称空間になることがわかった。

次に $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ 上の非退化交代形式 $\omega^{\mathbf{R}}$ を

$$\omega^{\mathbf{R}}(X,Y) := B^{\mathbf{R}}(JX,Y) = B^{\mathbf{R}}(Z_0,[X,Y])$$

で定義する。そして $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ 上の１次形式 f_{Z_0} を $f_{Z_0}(X) = B^{\mathbf{R}}(Z_0,X)$ で定義すると $\omega^{\mathbf{R}} = df_{Z_0}$ となる。よって $\omega^{\mathbf{R}}$ は $M^{\mathbf{C}}$ 上の $G^{\mathbf{C}}$ 不変シンプレクティック形式に拡張される。他方 $\bar{\mathfrak{g}}_{\pm 1}$ は $\omega^{\mathbf{R}}$ に関して $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ のラグランジュ部分空間になり $M^{\mathbf{C}}$ 上の $G^{\mathbf{C}}$ 不変な２つのラグランジュ分布 $F^{\pm}$ に拡張される。この２つの分布は完全積分可能である。実際原点 o を通る $F^{\pm}$ の葉体は軌道 $(\exp\bar{\mathfrak{g}}_{\pm 1})\cdot o$ で与えられる。以上から $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ は $(\omega^{\mathbf{R}}, F^{\pm})$ に関してバイ・ラグランジュ対称空間になることがわかった。

以上まとめて

定理 4.1 複素単純リー群 $G^{\mathbf{C}}$ のエルミート型スタイン対称空間 $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}}/K^{\mathbf{C}}$ は次の２つの性質のどちらかにより特徴付けられる：
(1) $M^{\mathbf{C}}$ は可約擬エルミート対称空間である。
(2) $M^{\mathbf{C}}$ はバイ・ラグランジュ複素対称空間である。

尚、大島-関口 [7] の表により $M^{\mathbf{C}}$ の分裂ルート系は C 型又は BC 型になる。そして上のタイプの対称空間の局所同型類は複素単純第１種 GLA と１対１に対応している。この種の複素対称空間の多変数函数論的性質を調べることは興味深い問題であると思う。

5　既約擬エルミート対称空間

5.1

既約擬エルミート対称空間の類は非コンパクト既約エルミート対称空間を含み、幾何学的に多くの点でエルミート対称空間と共通点を持つ。既約擬エルミート対称空間は前節で述べた可約擬エルミート対称空間の、楕円軌道として実現される子供である。

(M,J) を複素構造 J を持つ（連結）複素多様体とする。M 上の擬リーマン計量 h が**擬エルミート計量**とはベクトル場 X,Y に対して

$$h(JX,JY) = h(X,Y)$$

が成り立つことである。$\omega(X,Y) = h(JX,Y)$ で定義される非退化２次微分式が閉の時、h を**擬ケーラー計量**という。(M,J) の正則変換が h を不変にする時**正則等長変換**という。M の正則等長変換全体のなすリー群を $\mathrm{Aut}(M,J,h)$ で表す。擬エ

ルミート多様体 (M, J, h) が擬エルミート対称空間とは各点 $p \in M$ に対して p での点対称 $s_p \in \mathrm{Aut}(M, J, h)$ が存在することである。この時 $\mathrm{Aut}(M, J, h)$ は M に推移的に作用し h は擬ケーラー計量になる。G を $\mathrm{Aut}(M, J, h)$ の単位元の連結成分とし、M の一点 o（原点という）での G の固定部分群を H とすると M は商空間 G/H として表される。o での点対称 s_o を用いて G の対合 σ が導入され、それに関して $M = G/H$ は対称商空間になる。

実単純リー群 G の擬エルミート対称空間 $M = G/H$ が**既約**とは、H の線型 isotropy 表現が既約な事である。以下において既約擬エルミート対称空間についての R.A.Shapiro の先駆的な仕事 [19] について述べよう。

定義 5.1 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ が**既約擬エルミート対称対**とは
(1) $\mathfrak{g}$ は実単純リー環であり複素単純ではない。
(2) $\mathfrak{h}$ の中心 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}$ は１次元でその生成元は $\mathfrak{g}$ 内の楕円元であり、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}$ の $\mathfrak{g}$ での中心化環と一致する。

定理 5.2 ([19]) (1) 既約擬エルミート対称空間 G/H に対して H はその中心である１次元トーラスの G での中心化群と一致し連結になる。
(2) 単純リー群の対称空間 G/H に対して、G/H が既約擬エルミート対称空間なる事と、対応する対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ が既約擬エルミート対称対になる事は同値である。

この定理によりこの対称空間の分類は対応するリー環の対称対の分類に帰着される。さて、G/H を既約擬エルミート対称空間とし、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ をそれに対応するリー環の対称対とする。$\mathfrak{g}$ の σ による分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \underset{\sigma}{+} \mathfrak{m} \tag{5.1}$$

としよう。$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}$ の生成元 Z_0 を $J = ad_{\mathfrak{m}} Z_0$ が $\mathfrak{m}$ の複素構造になるように選ぶ。(5.1) の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{m}^{\mathbf{C}}$ において $\mathfrak{m}^{\mathbf{C}}$ は J による $\pm i$ 固有空間 $\mathfrak{m}^{\pm}$ の和になる：$\mathfrak{m}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{m}^{+} + \mathfrak{m}^{-}$. そこで $\bar{\mathfrak{g}}_0 := \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathfrak{g}}_{\pm 1} := \mathfrak{m}^{\pm}$ とおくと II.4 と同様に $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ は第一種 GLA として

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \bar{\mathfrak{g}}_{-1} + \bar{\mathfrak{g}}_0 + \bar{\mathfrak{g}}_1$$

と表わされる。G の複素化 $G^{\mathbf{C}}$ を G を含む様にとり、$\bar{G}_0$ を $G^{\mathbf{C}}$ 内で $\bar{\mathfrak{g}}_0$ が生成するリー部分群とすると複素旗多様体

$$\widehat{M} = G^{\mathbf{C}} / \bar{G}_0 \exp \bar{\mathfrak{g}}_1$$

はコンパクト既約対称エルミート空間になる。$M = G/H$ の親は $M^{\mathbf{C}} = G^{\mathbf{C}} / \bar{G}_0$ であり、それのリーマン的子供つまり M のリーマン兄弟は G^d / K^d で与えられる。ここに $\mathrm{Lie}\, G^d = \mathfrak{g}^d$ （$= \mathfrak{g}$ のアフィン双対）であり $\mathrm{Lie}\, K^d =: \mathfrak{k}^d := \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + i\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ で与えられる。G^d はエルミート型単純リー群で K^d はその極大コンパクト部分群である。$\widehat{M}$ はエルミート対称空間 $G^d / K^d = M^d$ のコンパクト双対であり従って G^d / K^d は $\widehat{M}$ 内へ通常のボレルの埋め込みで埋め込まれている。これのアフィン版として Shapiro による次の定理が成り立つ。

定理 5.3 ([19]) 既約擬エルミート対称空間 $M = G/H$ は $\widehat{M}$ 内に原点の G 軌道として正則かつ開に埋め込まれる。この埋め込みは M から $M^{\mathbf{C}}$ への包含写像と $M^{\mathbf{C}}$ から $\widehat{M}$ への自然な射影に factorize する。

$\widehat{M}$ 内で M と $M^{\mathbf{d}}$ の位置関係がどうなっているかは興味ある問題である。

例 5.4 既約擬エルミート対称空間

$$M = SL(2n, \mathbf{R})/SL(n, \mathbf{C}) \cdot T$$

（T は１次元トーラス）に対して $G^d/K^d, M^{\mathbf{C}}, \widehat{M}$ は次のようになる。

$$M^d = G^d/K^d = SU(n,n)/S(U(n) \times U(n)),$$

これは $I_{n,n}$ 型のカルタン領域である。M と G^d/K^d の共通の親はエルミート型スタイン対称空間

$$M^{\mathbf{C}} = SL(2n, \mathbf{C})/S(GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C}))$$

であり、

$$\begin{aligned}\widehat{M} &= SL(2n, \mathbf{C})/S(GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C})) \cdot \exp \bar{\mathfrak{g}}_1 \\ &= SU(2n)/S(U(n) \times U(n))\end{aligned}$$

でこれは複素グラースマン多様体 $Gr_n(\mathbf{C}^{2n})$ である。M と $M^d = G^d/K^d$ は夫々違った群の開軌道として $Gr_n(\mathbf{C}^{2n})$ 内に埋め込まれている。

5.2

既約擬エルミート対称空間はその分裂ルート系が C 型か BC 型かという事と K_ε 型か否かにより４つの類に分けられる。夫々の類に属する対称空間の個数は次の表の通りである。

	K_ε 型	非 K_ε 型
C 型	6 個	6 個
BC 型	4 個	10 個

例 5.4 の M は非 K_ε-C型である。非コンパクトエルミート対称空間が等質凸錐上のジーゲル領域として表示される事はよく知られている。既約擬エルミート対称空間をジーゲル領域として表示するという問題は、先ず K_ε 型の場合は金行 [20] により解決された。その後、非 K_ε-C 型の時は D'Atri-Gindikin [21] と Faraut-Gindikin [22] により解決された。しかし非 K_ε-BC 型の時は未解決である。

既約擬エルミート対称空間の分類表を掲げておこう。T は１次元トーラスである。

(1) K_ε-**C型**

$U(p,p)/U(p-k,k)\times U(k,p-k),\ 0\le k\le p$

$SO^*(4n)/U(2n-2k,2k),\ 0\le k\le n$

$Sp(n,\mathbf{R})/U(n-k,k),\ 0\le k\le n$

$SO^0(n+2,2)/SO^0(n+2-2k,2k)\cdot T,\ k=0,1,$

$E_{7(-25)}/E_6\cdot T$

$E_{7(-25)}/E_{6(-14)}\cdot T$

(2) K_ε-**BC 型**

$U(p,q)/U(p-k,k)\times U(k,q-k),\ 0\le k\le p<q,$

$SO^*(4n+2)/U(2n+1-2k,2k),\ 0\le k\le n,$

$E_{6(-14)}/SO^0(10-2k,2k)\cdot T,\ k=0,1$

$E_{6(-14)}/SO^*(10)\cdot T$

(3) **非** K_ε-**C 型**

$SL(2n,\mathbf{R})/SL(n,\mathbf{C})\cdot T$

$SL(2n,\mathbf{H})/SL(2n,\mathbf{C})\cdot T$

$SO^0(2p,2p)/U(p,p)$

$SO^0(p+1,q+1)/SO^0(p-1,q+1)\cdot T,\ 1\le p\le q$

$Sp(p,p)/U(p,p)$

$E_{7(7)}/E_{6(2)}\cdot T$

(4) **非** K_ε-**BC 型**

$SU(p,q)/S(U(k,r-k)\times U(p-k,q-r+k)),\ k\le p\le q,\ 0\le r-k\le q$

$SL(2n+1,\mathbf{H})/SL(2n+1,\mathbf{C})\cdot T$

$SO^0(2p,2q)/U(p,q),\ p<q,$

$SO^*(2n)/U(2p+1,n-2p-1),\ 2p+1\le n$

$SO^*(2n)/SO^*(2n-2)\cdot T$

$Sp(p,q)/U(p,q),\ p<q,$

$E_{6(2)}/SO^*(10)\cdot T,$

$E_{6(2)}/SO(4,6)\cdot T,$

$E_{7(-5)}/E_{6(-14)}\cdot T,$

$E_{7(-5)}/E_{6(2)}\cdot T.$

6　バイ・ラグランジュ対称空間

6.1

リー群論的に言うと単純リー群の対称空間がバイ・ラグランジュ対称空間とはそれが双曲軌道としての実現を許すということである。従ってこの対称空間の類はエルミート型スタイン対称空間達（６個）とその双曲型の子供達１２個より成る。幾何学的定義は次の通りである：

定義 6.1 $M = G/H$ を単純リー群の対称空間、ω を M 上の G 不変シンプレクティック形式、$F^{\pm}$ を M 上の２つの G 不変完全積分可能なラグランジュ分布とする。三組 $(M = G/H, \omega, F^{\pm})$ を**バイ・ラグランジュ対称空間**（又は**パラエルミート対称空間**）という。$(F^{\pm})$ 又はそれが定める二重葉層構造を M のバイ・ラグランジュ構造という。

バイ・ラグランジュ対称空間は $\mathbf{R}^3$ 内の一葉双曲面の高次元化であることに注意しておこう。一葉双曲面は２つの母線族をバイ・ラグランジュ構造として持つ $SL(2,\mathbf{R})$ の随伴軌道である。バイ・ラグランジュ対称空間は、パラエルミート対称空間という名で金行-香西 [25] により導入され、同時にその分類及び第一種単純 GLA との対応も確立された。バイ・ラグランジュ対称空間 $M = G/H$ について今までなされた研究は、（１）同変コンパクト化の構成とその G 軌道構造について、（２）そのコンパクト化の G 軌道分解が成層分解 (stratification) になること、（３）二重葉層構造 $F^{\pm}$ を不変にする M の微分同型のなす群、所謂 $F^{\pm}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$ の決定などである。これらについては金行 ([26],[27]) を参照、又概説としては金行 ([28],[29]) がある。[28] は（２）について詳しく述べであるが（３）については [29] が詳しい。尚、田中 [42] にも、（１）の同変コンパクト化と (３）で G が古典型の場合が少し違った方法で取り扱われている。

6.2

初めにバイ・ラグランジュ対称空間の構成について述べよう。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 \tag{6.1}$$

を第１種単純 GLA とし、(Z, τ) を associated pair とする (cf. II.3)。特性元 $Z \in \mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{g}$ の双曲元である。$\mathfrak{g}$ の対合 $\sigma := \mathrm{Ad}\exp\pi i Z$ は $\mathfrak{g}_0$ 上１、$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_1$ 上 -1 となるから $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \sigma)$ は対称対である。点 Z を通る随伴軌道 $M := (\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g})Z$ は $\mathfrak{g}$ 内の双曲軌道である。G_0 を、 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ で取った Z の中心化群とし、G を G_0 と内部自己同型群 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}$ で生成される $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ の開部分群とすると、M は商空間として

$$M = G/G_0 \tag{6.2}$$

と表わされる。右辺は対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \sigma)$ に対応する対称空間になる。G は一般に連結ではなく双曲軌道 M に作用する $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ の最大の部分群である。M の通常の幾

何学的性質を考える時は Ad$\mathfrak{g}$ で十分であるが、Aut$(M,F^{\pm})$ を考える時は このG が必要になる。II.4 と同様に $\mathfrak{g}$ 上の交代双１次形式 ω を $\mathfrak{g}$ のキリング形式 B を用いて

$$\omega(X,Y)=B(Z,[X,Y]),\ X,Y\in\mathfrak{g} \tag{6.3}$$

と定義すると ω は M 上の G 不変シンプレクティック形式を引起す。$\mathfrak{m}$ を G/G_0 の原点 o での接空間と同一視すると、$\mathfrak{g}_{\pm1}$ は M 上の G 不変な分布 $F^{\pm}$ に拡張される。(6.3) より $F^{\pm}$ はラグランジュ分布である。$F^{\pm}$ は完全積分可能である。実際 o を通る軌道 $(\exp\mathfrak{g}_{\pm1})\cdot o$ は $F^{\pm}$ の o を通る葉体になる。よって $(M=G/G_0,\omega,F^{\pm})$ はバイ・ラグランジュ対称空間である。

6.3

分布 $F^{\pm}$ の葉体の集合を $M^{\pm}$ で表す。点 $p\in M$ を通る $F^{\pm}$ の葉体を $F^{\pm}(p)$ で表す。$F^{\pm}$ の G 不変性より G は次のように $M^{\pm}$ に作用する：

$$gF^{\pm}(p)=F^{\pm}(gp),\quad g\in G.$$

この G の作用は $M^{\pm}$ に推移的である。葉体 $F^{\pm}(o)$ を $o^{\pm}$ で表すと G の $o^{\pm}$ での固定部分群 $U^{\pm}$ は $\mathfrak{g}_{\pm1}$ の G での正規化群と一致し、$U^{\pm}=G_0\exp\mathfrak{g}_{\pm1}$ となる。これは G の放物型部分群で結局 $M^{\pm}$ は旗多様体として

$$M^{\pm}=G/U^{\pm}$$

と表される。右辺は対称 R 空間であることに注意しておこう。直積多様体 $\widetilde{M}=M^{-}\times M^{+}$ 上には $G\times G$ が作用するからその対角線部分群として G も $\widetilde{M}$ に作用する。M から $\widetilde{M}$ への写像 φ を次のように定義する：M の点 $g\cdot o(g\in G)$ に対してそこを通る $F^{\pm}$ の葉体の対 (go^{-},go^{+}) を対応させる、即ち

$$\varphi(g\cdot o)=(go^{+},go^{-}),\quad g\in G$$

φ は M の G 同変埋め込みでかつ $\varphi(M)$ は $\widetilde{M}$ で開かつ稠密になる事がわかる。従って $\widetilde{M}$ は M の同変コンパクト化である。

定義 6.2 実解析多様体 M の分割 $M=\coprod_{k=0}^{s}A_k$ が M の成層分解 (stratification) であるとは次の３条件が充たされる事である：
(i) 各 A_k は M の実解析的部分多様体である。
(ii)A_k の閉包 $\bar{A}_k$ は M の実解析集合であり $A_{\le k}:=\coprod_{i=0}^{k}A_i$ と一致する $(0\le k\le s)$。
(iii)$\bar{A}_k$ の特異点集合 $\mathrm{Sing}(\bar{A}_k)$ は $A_{\le k-1}$ と一致する $(1\le k\le s-1)$ 。

リー群論的考察と若干の代数幾何的考察から次の定理を得る。

定理 6.3 ([27]) $M = G/G_0$ を GLA(6.1) に付随したバイ・ラグランジュ対称空間でその分裂階数を r 、分裂ルート系を Δ とする。この時
(i) M のコンパクト化 $\widetilde{M}$ は r+1 個の G 軌道の合併として表わされる：

$$\widetilde{M} = M_r \amalg M_{r-1} \amalg \cdots \amalg M_0, \tag{6.4}$$

ここに $\dim M_i > \dim M_{i-1}\,(1 \leq i \leq r)$ である。そして $M_r = \varphi(M)$ であり M_0 は旗多様体である。
(ii) $r \geq 2$ とすると $\widetilde{M}$ の軌道分解 (6.4) は $\widetilde{M}$ の成層分解になる。

定理 6.4 ([27]) M_r の滑らかな (i.e. C^∞) 微分同型 f が M_r を不変にするならば、f は他のすべての M_i を不変にする。

これを用いると $\mathrm{Aut}(M, F^\pm)$ から M_0 上のある幾何構造の自己同型群への単写純同型が得られ $\mathrm{Aut}(M, F^\pm)$ が決定できる。Δ が C_1 型でなければ $\mathrm{Aut}(M, F^\pm)$ は G と一致する。Δ が C_1 型の時は $\mathrm{Aut}(M, F^\pm)$ は有限次元リー群にはならない。

バイ・ラグランジュ対称空間に対して、今後は上で述べた事とは異なる方向の研究が望まれる。バイ・ラグランジュ対称空間上の調和解析については Molchanov の仕事 [30] がある。ケイリー型対称空間という特殊なタイプのバイ・ラグランジュ対称空間については II.7 で述べる。

7 因果的対称空間と順序付対称空間

この節の標準的文献は Hilgert-Ólafsson [31] である。

7.1 用語の説明

定義 7.1 （有限次元）実ベクトル空間 V 内の集合 C が V 内の**因果錐**(causal cone) とは
(i) C は V 内の凸閉集合であって (0) でも V 自身でもない。
(ii) C は錐である。即ち $x \in C$ かつ $\lambda > 0$ ならば $\lambda x \in C$ である。
(iii) C の内部（＝内点の集合）は空ではない 。
(iv) $C \cap (-C) = (0)$.

通常は因果錐 C は semi-algebraic set になっている場合が多い。

例 7.2 次の集合は因果錐である。
(1) $\mathbf{R}^n$ 内の閉ローレンツ錐

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 \leq 0, \quad x_n \geq 0.$$

(2) ｎ次エルミート行列のなす空間内の半正値な元の全体。

定義 7.3 M を滑らかなn次元多様体とする。$\mathcal{C}$ が M 上の**因果構造**(causal structure) とは
(i) $\mathcal{C}$ は M の各点 p での接空間 T_pM 内の因果錐 C_p の族である。
(ii) $\mathbf{R}^n$ 内の因果錐 C が存在して任意の $p \in M$ に対して C_p は C に線型同値である。
(iii) 対応 $p \mapsto C_p$ は滑らかである。

上の定義において $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in M}$ と表す。そして $(M, \mathcal{C})$ を**因果的多様体**(causal manifold) という。

例 7.4 (1) $\mathbf{R}^n$ の閉ローレンツ錐を $\mathbf{R}^n$ の各点に平行移動して得られる錐の場を $\mathcal{C}$ とすると、 $\mathcal{C}$ は因果構造である。
(2) $\mathbf{R}^3$ 内の方程式 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ で与えられる一葉双曲面 $\mathcal{H}$ 上の各点 p に対して p を通る 2 つの母線の、接平面 $T_p\mathcal{H}$ 内で取った上側を C_p とすると、$\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in M}$ は $\mathcal{H}$ 上の因果構造である。又 p を通る 2 つの母線の、 $T_p\mathcal{H}$ 内で取った右側を C'_p とすると $\mathcal{C}' = \{C'_p\}_{p \in \mathcal{H}}$ も $\mathcal{H}$ 上の因果構造である。

定義 7.5 $(M, \mathcal{C})$ を因果的多様体とし $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in M}$ とする。M の微分同型 f が**因果的自己同型**(causal automorphism) とは

$$f_* C_p = C_{f(p)}, \quad {}^\forall p \in M \tag{7.1}$$

が成り立つことである。$(M, \mathcal{C})$ の因果的自己同型全体のなす群を**因果的自己同型群**といい $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{C})$ で表す。($\mathrm{Aut}(M, \mathcal{C})$ は有限次元リー群になることもあるが一般には無限次元になる。) リー群 G が M に作用する場合、 G の各元 f が (7.1) を充たすならば因果構造 $\mathcal{C}$ は G **不変**であるという。

定義 7.6 因果的多様体 $(M, \mathcal{C})$, $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in M}$ に対して、M 上の絶対連続曲線 $c(t), t \in [a, b]$ が**因果曲線**とは接ベクトル $c'(t)$ が存在すれば $c'(t) \in C_{c(t)}$ となる事である。

定義 7.7 $(M, \mathcal{C})$ が**大域因果的**(globally causal) とは M 上に非自明な因果閉曲線が存在しないことである。

例えば、例 7.4(2) の $\mathcal{H}$ 上の因果構造 $\mathcal{C}$ は大域因果的であるが、$\mathcal{C}'$ は大域因果的ではない。次に順序集合の定義を思い出しておこう。

定義 7.8 $\leq$ が集合 X 上の（半）**順序**とは、 $x, y, z \in X$ に対して次の関係が成り立つことである。
(i) $x \leq x$ である。
(ii) $x \leq y \leq z$ ならば $x \leq z$ である。
(iii) $x \leq y \leq x$ ならば $x = y$ である。
この時 $(X, \leq)$ を**順序集合**という。

定義 7.9 群 G が順序集合 $(X, \leq)$ に作用する時、任意の元 $g \in G$ に対して必要十分条件

$$x \leq y \iff gx \leq gy$$

が成り立つ時、順序 $\leq$ は G **不変**という。

補題 7.10 $(M, \mathcal{C})$ を大域因果的としよう。この時、 M の 2 点 x, y に対して x から y へ至る M 上の因果曲線が存在する時、$x \leq y$ と定義すると、 $(M, \leq)$ は順序付多様体になる。

例 7.2(1) では、$\mathbf{R}^n$ の 2 点 x, y に対して $x \leq y$ となる必要十分条件は y が x を頂点とする閉ローレンツ錐に属することである。例 7.2(2) の大域因果的な因果構造 $\mathcal{C}$ からきまる順序について $x \leq y$ となる必要十分条件は x を通る 2 つの母線の上側の曲面 $\mathcal{H}$ 上の部分に y が属することである。

7.2 因果構造の存在

G をその中心が有限な非コンパクト半単純リー群、τ を G のカルタン対合とする。$K := G_\tau$ は G の極大コンパクト部分群である。V を有限次元実ベクトル空間、 ϱ を G の V 上の表現とする。V^K を K の元で固定される V の元のなす部分空間とする。もし ϱ が既約表現ならば V^K の次元は 0 又は 1 である。

定義 7.11 G の表現 (ϱ, V) は既約とする。ϱ が G の**球表現**であるとは $\dim V^K = 1$ なる事である。

因果錐の存在にとって基本的な Kostant,Vinberg([43],[32]) による 2 つの定理を述べよう。

定理 7.12 G は上に同じとし、 (ϱ, V) は G の既約表現とする。この時 V 内に G 不変な因果錐が存在するための必要十分条件は ϱ が球表現なることである。

証明について一言触れておこう。$0 \neq u_0 \in V$ が K で固定されるベクトルとすると、V の原点と軌道 Gu_0 の各点を通る半直線で作られる錐の閉包が求める因果錐になるのである。

系 7.13 (Kostant-Vinberg) $\mathfrak{g}$ を実単純リー環とする。$\mathfrak{g}$ 内に $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}$ 不変な因果錐が存在するための必要十分条件は $\mathfrak{g}$ がエルミート型なる事である。即ち $\mathfrak{g}$ の極大コンパクト部分環の中心が 1 次元なる事である。

定義 7.14 半単純アフィン対称空間 G/H が**因果的対称空間**とは、G/H が G 不変因果構造をもつことである。

定理 7.12 を線型 isotropy 表現の場合に適用すると、

定理 7.15 G/H を半単純アフィン対称空間とし、H の線型 isotropy 表現 ϱ は既約とする。この時 G/H が因果的対称空間になるための必要十分条件は ϱ が球表現となる事である。

ϱ が可約でも G/H が因果的となる場合も起り得る事に注意しておこう。

7.3 因果的対称空間の分類

Ol'shansky [33] による単純リー群の因果的対称空間の分類の方法は凡そ次のようなものである。G をエルミート型単純リー群（５個存在する）としよう。$G^{\mathbf{C}}$ をその複素化とすると、系 7.13 から対称空間 $G^{\mathbf{C}}/G$ は因果的であることがわかる。$G^{\mathbf{C}}/G$ の双対対称空間として群 G 自身も因果的対称空間である。Ol'shansky は $G^{\mathbf{C}}/G$ の因果的な子を作る方法を与えた。即ちリー環レベルで $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の、 $\mathfrak{g}$ に依存してきまるある実形ー regular real form ーを考えた。この実形を $\mathfrak{g}^\sharp$ で表すと対称対 $(\mathfrak{g}^\sharp, \mathfrak{g}^\sharp \cap \mathfrak{g})$ に対応する対称空間 $G^\sharp/G^\sharp \cap G$ は $G^{\mathbf{C}}/G$ に埋め込まれ、$G^{\mathbf{C}}/G$ の因果構造の制限として得られる因果構造を持つ。$G^\sharp/G^\sharp \cap G$ の双対対称空間も当然因果的になる。これで単純リー群のすべての因果的対称空間が得られるのである。

Hilgert-Ólafsson [31] は $G^{\mathbf{C}}/G$ とその regular な実形 $G^\sharp/G^\sharp \cap G$ を合わせて**非コンパクト型の因果的対称空間**(noncompactly causal symmetric space, NCC 対称空間と略記) と呼び、その双対を**コンパクト型の因果的対称空間**(compactly causal symmetric space, CC 対称空間と略記) と呼んだ。所で NCC 対称空間の類は II.3 で導入した K_εI 型という類と完全に一致する事が示された（金行 [17]）。従って Ol'shansky [33]、Ólafsson [34] による因果的対称空間の分類定理は次のように述べることができる：

定理 7.16 単純リー環 $\mathfrak{g}$ の因果的対称対は次のものに限る。
(1) K_εI 型の $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$,
(2) K_εI 型対称対の双対 $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{h}, \theta)$, ここに θ は $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役作用素である。

K_εI 型対称対 18 個の内、線型 isotropy 表現が可約なものが５個含まれている。それらはケイリー型対称対といわれておりバイ・ラグランジュ対称対である。ケイリー型対称対はバイ・ラグランジュ対称対の中では $\mathfrak{g}$ がエルミート型になるものとして特徴付けられる。次の概念の関係に注意しておこう：

$$\{NCC \text{ 対称空間}\} \cap \{CC \text{ 対称空間}\} = \{\text{ ケイリー型}\}.$$

Ólafsson は次のような NCC と CC の定義から出発して因果的対称対の分類を与えた。

定義 7.17 (i) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ が **CC** とは $\mathfrak{g}$ の (σ, τ) 分解における極大コンパクト部分環を $\mathfrak{k}$ としその中心を $\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ とする時、$\mathfrak{z}_\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} \neq (0)$ なる事である。
(ii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ が **NCC** とは $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ の元 $X_0 \neq 0$ が存在して X_0 は $\mathfrak{h}_\mathfrak{k}$ が生成する群で固

定されていることである。
(iii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ が**ケイリー型**とは $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ がバイ・ラグランジュ対称対なること、そしてこの時は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ は NCC でもあり CC でもある。

上の定義で (i) の場合 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ の任意の元は楕円元であり得られる因果錐 C の内包 $\overset{\circ}{C}$ は楕円元よりなる。(ii) の場合 X_0 は双曲元であり $\overset{\circ}{C}$ は双曲元よりなる。又一葉双曲面はケイリー型対称空間である。次の関係が成り立っている：

$$\begin{tikzcd}
CC\text{ 対称空間} \arrow[r, dash, "\text{aff.dual}"] \arrow[dr, dash, "\text{dual}"'] & \text{バイ・ラグランジュ対称空間} \arrow[d, dash, "\text{assoc.}"] \\
& NCC\text{ 対称空間}
\end{tikzcd}$$

以下に NCC 対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 、バイ・ラグランジュ対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ 、CC 対称対 $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{h})$ の対応表を掲げよう。

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^*$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{g}_0$
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbf{R})$	$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p,q)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(p,\mathbf{R}) + \mathfrak{gl}(q,\mathbf{R}))$
$\mathfrak{su}(n,n)$	同左	$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}) + \mathbf{R}$	同左
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbf{H})$	$\mathfrak{su}(2p,2q)$	$\mathfrak{sp}(p,q)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(p,\mathbf{H}) + \mathfrak{gl}(q,\mathbf{H}))$
$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbf{C})$	$\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$
$\mathfrak{so}^*(4n)$	同左	$\mathfrak{gl}(n,\mathbf{H})$	同左
$\mathfrak{so}(p+1,q+1)$	$\mathfrak{so}(2,p+q)$	$\mathfrak{so}(1,p) + \mathfrak{so}(1,q)$	$\mathfrak{so}(p,q) + \mathbf{R}$
$\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R})$	同左	$\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$	同左
$\mathfrak{sp}(n,n)$	$\mathfrak{sp}(2n,\mathbf{R})$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H}) + \mathbf{R}$
$E_{6(6)}$	$E_{6(-14)}$	$\mathfrak{sp}(2,2)$	$\mathfrak{so}(5,5) + \mathbf{R}$
$E_{6(-26)}$	$E_{6(-14)}$	$F_{4(-20)}$	$\mathfrak{so}(1,9) + \mathbf{R}$
$E_{7(-25)}$	同左	$E_{6(-26)} + \mathbf{R}$	同左
$E_{7(7)}$	$E_{7(-25)}$	$\mathfrak{sl}(4,\mathbf{H})$	$E_{6(6)} + \mathbf{R}$
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbf{C})$	$\mathfrak{su}(p,q)^2$	$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(p,\mathbf{C}) + \mathfrak{gl}(q,\mathbf{C}))$
$\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C})$	$\mathfrak{so}^*(2n)^2$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$
$\mathfrak{so}(n+2,\mathbf{C})$	$\mathfrak{so}(2,n)^2$	$\mathfrak{so}(2,n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}) + \mathbf{C}$
$\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C})$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R})^2$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R})$	$\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$
$E_6{}^{\mathbf{C}}$	$E_{6(-14)}{}^2$	$E_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(10,\mathbf{C}) + \mathbf{C}$
$E_7{}^{\mathbf{C}}$	$E_{7(-25)}{}^2$	$E_{7(-25)}$	$E_6{}^{\mathbf{C}} + \mathbf{C}$

上表で $\mathfrak{g}^2$ は $\mathfrak{g}+\mathfrak{g}$ を表す。又、上表で対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ がケイリー型となるのは、$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{su}(n,n)$, $\mathfrak{so}^*(4n)$, $\mathfrak{so}(2,q+1)$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R})$, $E_{7(-25)}$ の場合である。因果的対称空間上の表現論・調和解析の研究は非常にさかんで多くの興味深い結果が得られ又得られつつある。例えばラプラス変換、球函数、c 函数、ハーディ空間、離散系列表現等の研究。

7.4 順序付対称空間とケイリー型対称空間

G 不変な順序 $\leq$ が定義された対称空間 G/H を順序付対称空間という。$(M=G/H,\mathcal{C})$ を NCC 対称空間としよう。M の原点 o での接空間を $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{m}$ と同一視する。$C\subset\mathfrak{m}$ を $\mathcal{C}$ に属する因果錐としよう。この時 ([35],[36]) の理論より G の閉部分半群 $S(C)=(\exp C)H$ が定義される。M 上の錐の場 $\mathcal{C}$ は積分可能になる、即ち $\mathcal{C}$ の各錐を tangent object とする M 内の錐状部分集合が存在する。実際 M の点 $x=g\cdot o(g\in G)$ での錐状部分集合は $\Gamma_{g\cdot o}:=g(S(C)\cdot o)=g((\exp C)\cdot o)$ で与えられる。$\Gamma_{g\cdot o}$ の $g\cdot o$ での tangent object は錐 $C_{g\cdot o}$ である。そこで M の 2 点 $x=g\cdot o,\ y$ に対して

$$x\leq y \iff y\in\Gamma_{g\cdot o}$$

により G 不変順序が M に導入され $M=G/H$ は順序付対称空間になる。

定義 7.18 $(M=G/H,\leq)$ を順序付 NCC 対称空間としよう。この時順序構造 $\leq$ の自己同型群を

$$\mathrm{Aut}(M,\leq)=\{f\in\mathrm{Diffeo}(M):x\leq y\ \ \text{iff}\ \ f(x)\leq f(y)\ x,y\in M\}$$

により定義する。但し、Diffeo(M) は M の C^∞ 微分同型のなす群である。

M がケイリー型対称空間の時はバイ・ラグランジュ対称空間としての M の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M,F^{\pm})$ についての結果 (cf. II.6 及び [27]) を用いて $\mathrm{Aut}(M,\leq)$ を決定する事ができる。それの概説は [29] を参照されたい。

7.5 因果構造を持つ対称 R 空間

II.6 で出た対称 R 空間 $M^-=G/U^-$ において G がエルミート型と仮定しよう。この時 M^- は柱状既約有界対称領域 $D=G/K$（K は G の極大コンパクト部分群）のシロフ境界になる ([40])。K は 1 次元の中心を持つのでリーマン幾何の意味では M^- は既約ではない。M^- の原点 o^- での接空間を $\mathfrak{g}_1$ と同一視する。M^- の非コンパクト双対は $\mathfrak{g}_1$ 内の G_0 開軌道 Ω として実現されこれは凸錐でありその閉包 C は因果錐になる。C を G の作用で M^- 上の G 不変因果構造 $\mathcal{C}$ に拡張できる。$(M^-,\mathcal{C})$ は大域因果的ではない。$(M^-,\mathcal{C})$ の因果的自己同型群について次の定理が成り立つ：

定理 7.19 ([41]) 柱状既約対称有界領域 D の複素次元が 1 より大ならば、D の全正則変換群 $\mathrm{Hol}(D)$ は D の境界迄延びてシロフ境界 M^- を不変にし、M^- 上で

$$\mathrm{Aut}(M^-,\mathcal{C})=\mathrm{Hol}(D)$$

が成り立つ。

8 ω 領域ー不定値ヘッセ計量を持つアフィン対称領域ー

ω 領域とは実単純ジョルダン代数にその構造群の連結成分が作用する時の開軌道のことであり、M.Koecher [38] で導入された。この定義はジョルダン代数になじみのない人には不親切なので GLA の言葉で云うと、次のようになる。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$$

を実単純 GLA とし対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \sigma)$ (cf. II.6) の分裂ルート系は C_r 型としよう。II.6 の記号で群 G_0 の単位元の連結成分を ${G_0}^0$ とする。$\mathrm{Lie}\, {G_0}^0 = \mathfrak{g}_0$ に注意しておこう。${G_0}^0$ は部分空間 $\mathfrak{g}_{-1}$ に自然に作用するが、この時の ${G_0}^0$-開軌道を ω **領域**という。一般に $\mathfrak{g}_{-1}$ の ${G_0}^0$-軌道分解はシルベスターの慣性律の一般化であり、金行 [37] で詳しく調べられ、ω 領域の具体的な形もそこで決定された。ω 領域は一般には非凸な錐であり、${G_0}^0$ の商空間として表すとアフィン対称空間になる。

Ω を $\mathfrak{g}_{-1}$ 内の１つの ω 領域としよう。$\mathfrak{g}_{-1}$ は単純ジョルダン代数になるのでその２次の行列値作用素 $P : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathrm{End}\mathfrak{g}_{-1}$ （ジョルダン代数の quadratic 表現というもの）が定義される。

$$f(x) = |\det P(x)|, \;\; x \in \mathfrak{g}_{-1},$$

とおくと $f(x)$ は $\mathfrak{g}_{-1}$ 上の ${G_0}^0$-相対不変多項式になる。そして

$$d^2 \log f(x)$$

は Ω 上の ${G_0}^0$ 不変な不定符号のヘッセ計量になる ([38])。そして Ω 内の $f(x) = const$ という超曲面は ${G_0}^0$ の半単純成分 ${G_0}^s$ のアフィン対称空間になる。この対称空間は K_ε 型になる事が多いが、そうでない場合もある。志磨 [39] によるとこの対称空間は ${G_0}^s$ 不変な射影平坦接続を持つ。

他方 II.6 の補足であるが、既約擬エルミート対称空間で分裂ルート系が C 型のものは ω 領域上の柱状領域として実現される ([20], [21], [22])。つまり ω 領域はこの種の擬エルミート対称空間の実部になっている。

アフィン対称空間の親子関係による分類表 (古典型)

A 型

(1) 親 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}))$

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}),\mathfrak{so}(r,n-r))$, NCC, type K_ε, noncompact Riemann for $r=0$,

子 $(\mathfrak{su}(r,n-r),\mathfrak{so}(r,n-r))$, CC, compact Riemann for $r=0$,

(2) 親 $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C}))$

子 $(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{so}^*(2n))$,

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H}),\mathfrak{so}^*(2n))$

(3) 親 $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}))$

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H}),\mathfrak{sp}(r,n-r))$, NCC, type K_ε, noncompact Riemann for $r=0$,

子 $(\mathfrak{su}(2r,2n-2r),\mathfrak{sp}(r,n-r))$ CC, compact Riemann for $r=0$,

(4) 親 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(r,\mathbf{C})+\mathfrak{sl}($n-r$,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$, Hermitian type Stein symmetric (＝ complex bi-Lagrangian)、

子 $(\mathfrak{su}(p,$ n-p$),\ \mathfrak{su}($k, r-k$)+\mathfrak{su}($p-k, n-r-p+k$)+i\mathbf{R})$, $k\le p\le n, 0\le r-k\le n-p$, irreducible pseudo- Hermitian, compact Riemann for $p=n$; noncompact Riemann for $k=r=p$, type K_ε for $p=r$,

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}),\mathfrak{sl}(r,\mathbf{R})+\mathfrak{sl}(n-r,\mathbf{R})+\mathbf{R})$, bi-Lagrangian

(5) 親 $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(2r,\mathbf{C})+\mathfrak{sl}(2n-2r,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$, Hermitian type Stein symmetric

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H}),\mathfrak{sl}(r,\mathbf{H})+\mathfrak{sl}(n-r,\mathbf{H})+\mathbf{R})$, bi-Lagrangian,

(6) 親 $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})+\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$, Hermitian type Stein symmetric

子 $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{R}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})+i\mathbf{R})$, irred. pseudo-Hermitian,

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})+i\mathbf{R})$, irred. pseudo-Hermitian,

子 $(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{sl}(n,C)+\mathbf{R})$, bi-Lagrangian,

(7) 親 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})+\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}),\mathrm{diag})=\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$,

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})+\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}),\mathrm{diag})=\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})$,

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}))$,

子 $(\mathfrak{su}(r,n-r)+\mathfrak{su}(r,n-r),\mathrm{diag})=\mathfrak{su}(r,n-r)$, CC

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{su}(r,n-r))$, NCC, type K_ε,

(8) 親 $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C})+\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C}),\mathrm{diag})=\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C})$,

子 $(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H})+\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H}),\mathrm{diag})=\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H})$,

子 $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H}))$

B 型,D 型

(1) 親 $(\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}(r,\mathbf{C})+\mathfrak{so}(n-r,\mathbf{C}))$
子 $(\mathfrak{so}(p,n-p),\mathfrak{so}(k,r-k)+\mathfrak{so}(p-k,n-r-p+k))$ $,k\le p\le n, 0\le r-k\le n-p$

(2) 親 $(\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}(n-2,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$ Hermitian type Stein symmetric space
子 $(\mathfrak{so}(k,n-k),\mathfrak{so}(k-2,n-k)+i\mathbf{R})$ irred. pseudo-Hermitian symmetric
子 $(\mathfrak{so}(k,n-k),\mathfrak{so}(k-1,n-k-1)+\mathbf{R})$ bi-Lagrangian symmetric

(3) 親 $((\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}(2k,\mathbf{C})+\mathfrak{so}(2n-2k,\mathbf{C}))$
子 $(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{so}^*(2k)+\mathfrak{so}^*(2n-2k))$

(4) 親 $(\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}(n,\mathbf{C})+\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}))$
子 $(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}))$ CC
子 $(\mathfrak{so}(n,n),\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}))$ NCC

(5) 親 $(\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$ Hermitian type Stein symmetric
子 $(\mathfrak{so}(2k,n-2k),\mathfrak{su}(k,n-k)+i\mathbf{R})$ irred. pseudo-Hermitian symmetric
子 $(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{su}(k,n-k)+i\mathbf{R})$ irred. pseudo-Hermitian symmetric
子 $(\mathfrak{so}(n,n),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})+\mathbf{R})$ bi-Lagrangian symmetric

(6) 親 $(\mathfrak{so}(4n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$ Hermitian type Stein symmetric
子 $(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H})+\mathbf{R})$ bi-Lagrangian symmetric

(7) 親 $(\mathfrak{so}(n,\mathbf{C})+\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}),\text{diagonal})=\mathfrak{so}(n,\mathbf{C})$
子 $(\mathfrak{so}(k,n-k)+\mathfrak{so}(k,n-k),\text{diagonal})=\mathfrak{so}(k,n-k)$
CC when $k=2$
子 $(\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}(k,n-k))$ NCC when $k=2$

(8) 親 $(\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C})+\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C}),\text{diagonal})=\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C})$
子 $(\mathfrak{so}^*(2n)+\mathfrak{so}^*(2n),\text{diagonal})=\mathfrak{so}^*(2n)$ CC
子 $(\mathfrak{so}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{so}^*(2n))$ NCC

C 型

(1) 親 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$ Hermitian type Stein symmetric
子 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R}),\mathfrak{su}(k,n-k)+i\mathbf{R})$ irred. pseudo-Hermitian symmetric
子 $(\mathfrak{sp}(k,n-k),\mathfrak{su}(k,n-k)+i\mathbf{R})$ irred. pseudo-Hermitian symmetric
子 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R}),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R})+\mathbf{R})$ bi-Lagrangian symmetric

(2) 親 $(\mathfrak{sp}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{sl}(2n,\mathbf{C})+\mathbf{C}^*)$ Hermitian type Stein symmetric
子 $(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{sl}(n,\mathbf{H})+\mathbf{R})$ bi-Lagrangian symmetric

(3) 親 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{sp}(r,\mathbf{C})+\mathfrak{sp}(n-r,\mathbf{C}))$
子 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R}),\mathfrak{sp}(r,\mathbf{R})+\mathfrak{sp}(n-r,\mathbf{R}))$
子 $(\mathfrak{sp}(p,n-p),\mathfrak{sp}(k,r-k)+\mathfrak{sp}(p-k,n-p-r+k))$

(4) 親 $(\mathfrak{sp}(2n,\mathbf{C}),\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C})+\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}))$
子 $(\mathfrak{sp}(2n,\mathbf{R}),\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}))$ CC
子 $(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}))$ NCC

(5) 親 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C})+\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}),\text{diagonal})=\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C})$
子 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R})+\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R}),\text{diagonal})=\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R})$ CC
子 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R}))$ NCC
子 $(\mathfrak{sp}(k,n-k)+\mathfrak{sp}(k,n-k),\text{diagonal})=\mathfrak{sp}(k,n-k)$
子 $(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{C}),\mathfrak{sp}(k,n-k))$

参考文献

[1] M. Berger, Les espaces symétriques noncompacts, Ann. Sci. École Norm. Sup., 74 (1957), 85 — 177.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry II, Interscience Publishers, New York, 1969.

[3] S. Koh, On affine symmetric spaces, Trans. AMS 119 (1965), 291–309.

[4] O. Loos, Symmetric Spaces I, Benjamin, New York, 1969.

[5] G. Mostow, Some new decomposition theorems for semisimple Lie groups, Memoirs AMS 14 (1955), 31–54.

[6] S. Murakami, On the automorphisms of a real semisimple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 4 (1952), 103–133.

[7] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root systems of a semisimple symmetric pair, Advanced Studies in Pure Math. 4(1984), 433—597.

[8] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces, Canad. J. Math. 31 (1979), 157—180.

[9] J. Dorfmeister and Z. D. Guan, Fine structures of reductive pseudo-kählerian spaces, Geom. Dedicata, 39(1991), 321-338.

[10] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch's proportionality principle, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 37(1990), 71-87.

[11] H. Azad and R. Kobayashi, The existence of complete Ricci-flat kähler metrics on symmetric varieties, preprint, 1993.

[12] Y. Matsushima, Espaces homogenes de Stein des groupes de Lie complexes, Nagoya Math. J. 16(1960), 205-218.

[13] S. Gindikin, Complex crowns of Riemannian spaces and Matsuki duality, in Theory of Lie Groups and Manifolds, 上智大学数学考究録 No. 45 (宮岡・田丸編), 2002, pp.13-20.

[14] C. De Concini and C. Procesi, Complete symmetric varieties, LNM 996 (1983), Springer-Verlag, pp.1-44.

[15] J. Wolf, The Stein condition for cycle spaces of open orbits on complex flag manifolds, Ann. of Math. 136(1992), 541-555.

[16] S. Gindikin and B. Krötz, Complex crowns of Riemannian symmetric spaces and non-compactly causal symmetric spaces, Trans. AMS. 354(2002), 3299-3327.

[17] S. Kaneyuki, Signatures of roots and a new characterization of causal symmetric spaces, in Topics in Geometry : In Memory of Joseph D'Atri (Ed. S. Gindikin), Birkhauser, 1996, pp. 213-229.

[18] T. Oshima and J. Sekiguchi, Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric spaces, Invent. Math. 57(1980), 1-81.

[19] R. A. Shapiro, Pseudo-Hermitian symmetric spaces, Comment. Math. Helv. 46(1971), 529-548.

[20] S. Kaneyuki, Pseudo-Hermitian symmetric spaces and Siegel domains over non-degenerate cones, Hokkaido Math. J. 20(1991), 213-239.

[21] J. E. D'Atri and S. Gindikin, Siegel domain realization of pseudo-Hermitian symmetric manifolds, Geometriae Dedicata 46(1993), 91-126.

[22] J. Faraut and S. Gindikin, Pseudo-Hermitian symmetric spaces of tube type, in Topics in Geometry: In Memory of J. D 'Atri (S. Gindikin, Ed.), Birkhauser, 1996, pp.123-154.

[23] Z. Hou, S. Deng, S. Kaneyuki and K. Nishiyama, Dipolarizations in semisimple Lie algebras and homogeneous parakähler manifold, J. Lie Theory, 9(1999), 215-232.

[24] S. Kaneyuki, Homogeneous symplectic manifolds and dipolarizations in Lie algebras, Tokyo J. Math. 15(1992), 313-325.

[25] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math. 8(1985), 81-98.

[26] S. Kaneyuki, On orbit structure of compactifications of parahermitian symmetric spaces, Japan. J. Math. 8(1987), 333-370.

[27] S. Kaneyuki, Compactification of parahermitian symmetric spaces and its applications, II : Stratifications and automorphism groups, J. Lie Theory, 13(2003), 535-563.

[28] 金行壮二、ジョルダン三項積の成層分解と対称空間への応用、RIMS 講究録 1294 「非可換代数系の表現と調和解析」(2002)、８－２６．

[29] 金行壮二、バイ・ラグランジュ対称空間のコンパクト化の成層分解と自己同型群への応用、RIMS 講究録 1346、「等質空間と部分多様体の幾何学」(2003), 70-79.

[30] V. F. Molchanov, Quantization on parahermitian symmetric spaces, AMS Translation (2) Vol. 175(1996), 81-95.

[31] J. Hilgert and G. Ólafsson, Causal Symmetric Spaces, Geometry and Harmonic Analysis, Academic Press, 1997.

[32] E. B. Vinberg, Invariant convex cones and ordering in Lie groups, Func. Anal. Appl. 15(1982), 1-10.

[33] G. I. Ol'shansky, Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups and invariant causal (order) structures on pseudo-Riemannian symmetric spaces, Sov. Math. Dokl. 26(1982), 97-101.

[34] G. Ólafsson, Symmetric spaces of Hermitian type, Differential Geom. Appl. 1(1991), 195-233.

[35] G. I. Ol'shansky, Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups, and the holomorphic discrete series, Func. Anal. Appl. 15(1982), 275-285.

[36] J. Hilgert, K. H. Hofmann and J. D. Lawson, Lie Groups, Convex Cones and Semigroups, Oxford Univ. Press, 1989.

[37] S. Kaneyuki, The Sylvester's law of inertia in simple graded Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 50(1998), 593-614.

[38] M. Koecher, Jordan Algebras and Their Applications, Lect. Notes, Univ. Minnesota, 1962.

[39] H. Shima, Homogeneous spaces with invariant projectively flat affine connections, Trans. AMS. 351(1999), 4713-4726.

[40] A. Koranyi and J. Wolf, Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half planes, Ann. of Math. 81(1965), 265-288.

[41] S. Kaneyuki, On the causal structures of the Šilov boundaries of symmetric bounded domains, LNM 1468, Springer-Verlag, 1991, pp. 127-159.

[42] N. Tanaka, On affine symmetric spaces and the automorphism groups of product manifolds, Hokkaido Math. J. 14(1985), 277-351.

[43] I. Segal, Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy, Academic Press, 1976.