マスロフ指数の積分表示とその応用
(Integral formula of Maslov index and its applications)

小野　肇*

東京都立大学　日本学術振興会特別研究員（ＰＤ）

Abstract

Let L be a Lagrangian submanifold of a Kähler manifold (M, J, ω). In this talk, we give the integral formula of the Maslov index of L. Using this, we investigate relations between symplectic topological conditions and the mean curvature vector of L when (M, J, ω) is a Kähler-Einstein manifold with nonzero Ricci curvature.

1　イントロダクション

今回の講演の基本的な発想は次のような考え方に基づく：

一般に、ケーラー多様体上で

- **シンプレクティックトポロジカルに定義された量（性質）**
- **リーマン幾何的に定義された量（性質）**

の間には明確な関連はあるかどうかわからない。しかし、（リッチ零でない）ケーラー・アインシュタイン多様体においてはこれらの間に関係があるのではないか？

例えば、シンプレクティック幾何、リーマン幾何の双方にまたがるような問題を考えるときには、以上のことを考えておくのは有用である。そのような問題の例として、つぎを考える：

問題 1.1. (M, J, ω) をケーラー（・アインシュタイン）多様体、$L \subset M$ をコンパクトラグランジュ部分多様体とする。

$$\mathrm{Ham}(L) := \{\phi(L) \subset M | \phi : (M, \omega) \text{ のハミルトン同相写像 } \}$$

と書いたとき、$\mathrm{Ham}(L)$ の中に極小ラグランジュ部分多様体は存在するか？

*E-mail address: onola@comp.metro-u.ac.jp

この問題を考えるにはもちろん平均曲率ベクトルの挙動を扱わなくてはならないのだがそれは、次のようにシンプレクティックな量（マスロフ指数）と関係を持つことがわかる。

$$\boxed{\text{平均曲率ベクトル（リーマン）}}$$

$$\updownarrow \omega\text{で dual をとる}$$

$$\boxed{\text{平均曲率形式（半リーマン、半シンプレクティック）}}$$

$$\updownarrow \textbf{積分表示による対応}$$

$$\boxed{\text{マスロフ指数（シンプレクティック）}}$$

この関係を応用して問題 1.1 に関して一つの必要条件（シンプレクティック）を与えることが出来る。

2 平均曲率形式とマスロフ指数

(M, J, ω) をケーラー多様体 $L \overset{\iota}{\subset} M$ をラグランジュ部分多様体とする。このとき、

$$\Omega^1(L) \ni \alpha_H := \iota^*(H \lrcorner \omega)$$

を L の平均曲率形式と呼ぶことにする。ここで、H は L の平均曲率ベクトル（第二基本形式のトレース）。

事実 2.1.

- *(Dazord, Oh)*

$$d\alpha_H = \iota^* \rho$$

ここで、ρ は (M, J, ω) のリッチ形式

- *(Oh)* (M, J, ω) がケーラー・アインシュタインとすると平均曲率形式のコホモロジー類はハミルトンイソトピーで不変、つまり、任意の (M, ω) のハミルトン同相写像 ϕ に対して

$$\phi^*_{|L}[\alpha_{H'}] = [\alpha_H] \in H^1(L; \mathbb{R})$$

ここで、$[\alpha_{H'}] \in H^1(\phi(L); \mathbb{R})$ で $\alpha_{H'}$ は $\phi(L)$ の平均曲率形式。

これから (M, J, ω) がケーラー・アインシュタインの時には

$$\mathrm{Ham}(L) \text{ に極小ラグランジュ部分多様体が存在} \Rightarrow [\alpha_H] = 0$$

がわかる。（しかし、$[\alpha_H]$ は「半リーマン、半シンプレクティック」な量なので、多少すっきりしない感じもする。）

次に、シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω) のラグランジュ部分多様体 $L \subset M$ に対して準同型 $\mu_L : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$ を次の手順で定義する（[Oh2] で Oh がフレアーコホモロジーを定義するときに考えた）：

$u : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ に対して u^*TM はシンプレクティックベクトル束として自明束 $D^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ と同型である．したがって写像

$$\partial D^2 \longrightarrow GrLag(\mathbb{R}^{2n}) \cong U(n)/O(n) \xrightarrow{\det^2} S^1$$

を考えることが出来、その写像度を $\mu_L(u)$ と書く。ただし、$GrLag(\mathbb{R}^{2n})$ はラグランジュグラスマン多様体であり、$\partial D^2 \to GrLag(\mathbb{R}^{2n})$ は $\partial D^2 \ni p \mapsto T_{u(p)}L$ により決まる写像である。すると、$\mu_L(u)$ はホモトピー不変であり、準同型 $\mu_L : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$ を誘導することがわかる。これを L のマスロフ指数と呼ぶ。また、$\mu_L \neq 0$ のとき、

$$\Sigma_L = \{\mu_L(A) | A \in \pi_2(M, L),\ \mu_L(A) > 0\}$$

を最小マスロフ数と呼ぶ。これらは、ハミルトンイソトピーで不変である。（以上の定義には全くリーマン幾何は関係していないことに注意する。）

しかし、特に (M, ω) にケーラー構造が入るときには、次のように、マスロフ指数を平均曲率形式（これは、半リーマン、半シンプレクティックなものであった）を交えて次のように表すことが出来る：

定理 2.2 (マスロフ指数の積分表示). ケーラー多様体 (M, J, ω) のラグランジュ部分多様体 $L \subset M$ に対して

$$\mu_L([u]) = \frac{1}{\pi} \int_{D^2} u^* \rho + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D^2} u^*_{|\partial D^2} \alpha_H$$

ただし、ρ は (M, J, ω) のリッチ形式。

証明の概略. Vaisman の本 [V] に詳しく述べられているように、実は多様体 X 上のシンプレクティックベクトル束 $E \to X$ の 2 つのラグランジュ部分束 L_0, L_1 に対してマスロフ類 $m(L_0, L_1) \in H^1(X; \mathbb{R})$ と呼ばれるものが、上の構成と同様に定義されることが知られている。マスロフ類に関しては接続を用いた積分表示が知られている（[V]。）これを $X = \partial D^2, E = u^*_{\partial D^2} TM \cong \partial D^2 \times \mathbb{C}^n, L_0 = \partial D^2 \times (\{0\} \oplus i\mathbb{R}^n), L_1 = u^*_{\partial D^2} TL$ として計算する。 □

3 応用

ここでは、定理2.2の簡単な応用として (M, J, ω) がケーラー・アインシュタインの場合に

1. ラグランジュ部分多様体のシンプレクティックな性質を平均曲率形式を用いて表す。

2. Ham(L) の中に極小ラグランジュ部分多様体が存在するためのシンプレクティックな必要条件

を与える。

定義 3.1 ([Oh2]). シンプレクティック多様体 (M,ω) のラグランジュ部分多様体 L が単調である

$$\Updownarrow def.$$

$$\text{ある定数 } c>0 \text{ があって、} \mu_L([u]) = c\int_{D^2} u^*\omega \quad (\ {}^{\forall}u : (D^2, \partial D^2) \to (M,L))$$

系 3.2. (M,ω) を単連結シンプレクティック多様体とし、M の複素構造 J で (M,J,ω) がリッチ正ケーラー・アインシュタインとなるものが存在するとする。このとき

$$L \text{ が単調} \iff [\alpha_H] = 0$$

(ここで、平均曲率形式はケーラー・アインシュタイン計量に関するもの)

特に、このケーラー・アインシュタイン計量に関して $\mathrm{Ham}(L)$ の中に極小ラグランジュ部分多様体があるとすると、L は単調である。

このほかにも、[Oh3] において定義されたラグランジュ部分多様体の「cyclic 性」と呼ばれるシンプレクティックな概念を(ケーラー・アインシュタインの時には)平均曲率形式のコホモロジー類により完全に特徴付けすることも出来る。([O])

さらに、次のような定量的な応用も出来る：

$$\gamma_{c_1} := \min\{c_1(M)(B) | B \in H^2(M,\mathbb{Z}), c_1(M)(B) > 0\}$$

$$\gamma_\omega := \min\{\omega(B) | B \in H^2(M,\mathbb{Z}), \omega(B) > 0\}$$

$$\gamma_{\omega,L} := \min\left\{\int_{D^2} u^*\omega | [u] \in \pi_2(M,L), \int_{D^2} u^*\omega > 0\right\}$$

注 3.3. $\gamma_\omega, \gamma_{\omega,L}$ は常に存在するわけではない.

命題 3.4. (M,ω) を単連結なシンプレクティック多様体で (M,J,ω) が正のケーラー・アインシュタインとなる複素構造 J が存在すると仮定する. このとき,

$$L \text{ が単調} \Rightarrow \frac{\gamma_\omega}{\gamma_{\omega,L}}\Sigma_L = 2\gamma_{c_1} \quad \left(\frac{\gamma_\omega}{\gamma_{\omega,L}} \text{ は整数.}\right)$$

例 3.5. 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ 上のフビニ・ストゥディ計量を考える。このときには $\Gamma_{c_1} = n+1$ である。そこで、$n+1$ が素数であるとすると、向き付け可能ラグランジュ部分多様体 $L \subset \mathbb{CP}^n$ に対して、

$$(L: \text{ハミルトン変形して極小に出来る} \Rightarrow) L: \text{単調} \Rightarrow \Sigma_L = 2 \text{ 又は } 2(n+1)$$

がわかる。さらにもう少し考えると

$$L: \text{ハミルトン変形してハミルトン安定かつ極小に出来る} \Rightarrow \Sigma_L = 2$$

がわかる。*[O]*

References

[Oh1] Y. -G. Oh, Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds, Invent. Math. 101 (1990), 501-519.

[Oh2] Y. -G. Oh, Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 949-994.

[Oh3] Y. -G. Oh, Mean curvature vector and symplectic topology of Lagrangian submanifolds in Einstein- Kähler manifolds, Math. Z. 216 (1994), 471-482.

[O] H. Ono, Integral formula of Maslov index and its applications, preprint.

[V] I. Vaisman, Symplectic geometry and secondary characteristic classes, Progress in Math. 72, Birkhäuser, 1987.