Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one

Hiroshi Tamaru
Department of Mathematics, Sophia University, Tokyo 102-8995, JAPAN

The results which wil be presented in this article are obtained by the joint work with Jürgen Berndt.

An isometric action on a Riemannian manifold is said to be of *cohomogeneity one* if the regular orbit has codimension one, where the regular orbit means the maximal dimensional orbit. Therefore the study of cohomogeneity one actions is equivalent to the study of homogeneous hypersurfaces.

Cohomogeneity one actions on compact symmetric spaces have been classified by Kollross ([10]). For noncompact symmetric spaces, the real hyperbolic space $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ is the only space on which cohomogeneity one actions have been classified. In this article we will give a scketch of the classification of cohomogeneity one actions on the complex hyperbolic spaces $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ and the Cayley hyperbolic plane $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$. We also mention the quaternionic hyperbolic case.

Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one

田丸 博士　上智大学理工学部

2003.11.20, 於「部分多様体論・湯沢 2003」

本稿では, Jürgen Berndt 氏との共同研究で得られた, 非コンパクト型階数 1 対称空間 (すなわち $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$) への cohomogeneity one action についての結果を述べる. $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ への cohomogeneity one action は Cartan ([6]) によって知られているが, その他の非コンパクト型対称空間の場合の分類は未知であった. 本稿では, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$ への cohomogeneity one action の分類について述べる. また, $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$ の場合の分類への展望も述べたい.

1 Introduction

定義 1.1 Riemann 多様体 M への等長的作用が *cohomogeneity one* でるとは, regular orbit の余次元が 1 であること.

ここで, 最大次元の軌道を regular orbit, そうでない軌道を singular orbit と呼ぶ. 我々の目標は非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action の分類である. 分類は, 次のような同値関係の元で行う.

定義 1.2 Riemann 多様体 M への H, H' の作用が *orbit equivalent* であるとは, H-軌道を H'-軌道に移す等長変換が存在すること, すなわち, $\exists f \in \mathrm{Isom}(M) \ : \ \forall p \in M, \ f(H \cdot p) = H' \cdot f(p)$.

コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action は, Hsiang-Lawson ([9]), 高木 ([11]) などの結果を経て, 最終的には Kollross ([10]) によって分類が完成した. 我々は非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action を研究している. 非コンパクト型対称空間で cohomogeneity one action の分類が完成しているものは, 実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ のみである.

命題 1.3 (Berndt-Brück ([3])) 非コンパクト型対称空間 M への cohomogeneity one action は次のいずれかを満たす:

(1) singular orbit を持たない, または

(2) ただ一つ singular orbit を持ち,

  (i) singular orbit が全測地的,

  (ii) singular orbit が全測地的でないが極小.

[0]本稿の研究は文部科学省科研費 (若手研究 (B) 14740049) の助成を得た.

これらのうち, (1) は [4] によって, (2)-(i) は [5] によって, 分類が完成している. 残されているのは (2)-(ii) であるが, 我々は $M = \mathbb{C}\mathrm{H}^n, \mathbb{O}\mathrm{H}^2$ の場合に, その分類を完成させた. また, $M = \mathbb{H}\mathrm{H}^n$ の場合に関してもいくつかの結果が得られている.

(1) の場合の分類を行った [4] における議論, および, 今回の分類の議論は, 次のような step に分けられる:

1. 例を構成する (作用する群の Lie 環を構成する)
2. それらの例で全てであることを示す (幾何学的な条件で作用する群に制約を与える)
3. orbit equivalence を判定する

この方針に従って, 我々の得た結果を述べていきたい.

2 Cohomogeneity one action の構成

ここでは, Berndt-Brück ([3]) による, 階数 1 非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action の構成方法を紹介する.

まず, 次のような自然な表現を考える:

$$H = \begin{cases} \mathrm{SO}(n-1) \\ \mathrm{U}(n-1) \\ \mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{Sp}(1) \\ \mathrm{Spin}(7) \end{cases} \quad \text{acts on} \quad V = \begin{cases} \mathbb{R}^{n-1} \\ \mathbb{C}^{n-1} \\ \mathbb{H}^{n-1} \\ \mathbb{O} \end{cases}$$

これらの表現に対し, 次の性質 $(*)$ をみたす実ベクトル部分空間 $\mathfrak{v}_0 \subset V$ を考える:

$(*)$ $N_H(\mathfrak{v}_0)$ が $\mathfrak{v}_0$ の単位球に transitive に作用.

このような性質 $(*)$ を満たす $\mathfrak{v}_0$ に対して, cohomogeneity one action が構成できることを示す.

その為に, 非コンパクト型階数 1 対称空間 M の性質を少し復習する. 一般に非コンパクト型対称空間 $M = G/K$ に対して, $G = KAN$ を岩沢分解とすると, $M \cong AN$ (AN に適当な左不変計量を入れたものと等長的) となる. よって T_oM は AN のリー環 $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ と自然に同一視される. ここで,

$$\mathfrak{k}_0 := Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = N_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{n})$$

と置く. すると, $\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ は部分リー環であり, 階数が 1 の場合には以下のようになる:

M	$\mathfrak{k}_0$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} + \mathfrak{z}$
$\mathbb{R}\mathrm{H}^n$	$\mathrm{so}(n-1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{n-1} + 0$
$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$	$\mathrm{u}(n-1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}^{n-1} + i\mathbb{R}$
$\mathbb{H}\mathrm{H}^n$	$\mathrm{sp}(n-1) + \mathrm{sp}(1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{H}^{n-1} + \mathrm{Im}\mathbb{H}$
$\mathbb{O}\mathrm{H}^n$	$\mathrm{spin}(7)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{O} + \mathrm{Im}\mathbb{O}$

上で考えた作用は, $\mathfrak{k}_0$ をリー環に持つ群 K_0 の $\mathfrak{v}$ への作用に他ならない.

定理 2.1 (Berndt-Brück ([3])) M を非コンパクト型階数 1 対称空間とし, K_0 の $\mathfrak{v}$ への作用に関して $\mathfrak{v}_0 \subset \mathfrak{v}$ が $(*)$ を満たしているとする. このとき, $N_{\mathfrak{k}_0}(\mathfrak{v}_0) + \mathfrak{a} + (\mathfrak{v} \ominus \mathfrak{v}_0) + \mathfrak{z}$ に対応する群 $H(\mathfrak{v}_0)$ の M への作用は cohomogeneity one.

証明. H-作用の o での slice 表現は, $N_{K_0}(\mathfrak{v}_0)$ の $\mathfrak{v}_0$ への表現と同値. これは仮定より cohomogeneity one. ∎

3 singular orbit が全測地的でない cohomogeneity one action

この節では, singular orbit が全測地的でない cohomogeneity one action について考察する. 階数が 1 の場合, そのような作用は全て前節の方法で構成でき, orbit equivalence は $\mathfrak{v}_0$ の共役性と一致する.

定理 3.1 M を非コンパクト型階数 1 対称空間とする.

(1) H の M への作用が cohomogeneity one であり, 全測地的でない singular orbit F を持つとする. このとき, $(*)$ を満たす部分空間 $\mathfrak{v}_0 \subset \mathfrak{v}$ が存在し, H-作用と $H(\mathfrak{v}_0)$-作用は orbit equivalent.

(2) $\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_0' \subset \mathfrak{v}$ が $(*)$ を満たし, $H(\mathfrak{v}_0)$-作用と $H(\mathfrak{v}_0')$-作用の singular orbit が全測地的でないとする. このとき $H(\mathfrak{v}_0)$-作用と $H(\mathfrak{v}_0')$-作用が orbit equivalent である為の必要十分条件は, $\mathfrak{v}_0$ と $\mathfrak{v}_0'$ が K_0 の元で共役となること.

この定理の証明のポイントは, 「singular orbit が全測地的でない」という仮定をどう使うかである. 本質的に次の定理を用いる.

定理 3.2 (Alekseevsky - Di Scala [1]) 非コンパクト型階数 1 対称空間 M への H の等長的作用は, 次のいずれかを満たす:

(1) 全測地的な軌道を持つ, または

(2) $\exists 1 x \in M(\infty) : H \cdot x = x$.

ここで $M(\infty)$ は M の境界と呼ばれるものであり, M の asymptotic geodesic の同値類の全体である. M への作用は自然に $M(\infty)$ への作用に拡張される. 詳しくは例えば [8] を参照.

定理 3.1 の証明. (1): 仮定より H の作用は全測地的軌道を持たないとして良い. 定理 3.2 より, $\exists x \in M(\infty) : H \cdot x = x$. ここで x を固定する等長変換全体のリー環は $\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ と共役である. すなわち $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ として良い. このことから $\nu_o F \subset \mathfrak{v}$ であるこｔが示される. よって, $\mathfrak{v}_0 := \nu_o F$ とすれば良い.

(2): 必要条件であることは明らかであるので, 十分条件であることを示す. $H(\mathfrak{v}_0)$-作用と $H(\mathfrak{v}_0')$-作用が orbit equivalent であると仮定すると, 全ての $H(\mathfrak{v}_0)$-軌道を $H(\mathfrak{v}_0')$-軌道

に写す等長変換 f が存在する. $H(\mathfrak{v}_0)\cdot o$ と $H(\mathfrak{v}'_0)\cdot o$ がそれぞれの作用の singular orbit であり, f は singular orbit を singular orbit に写すので, $f(o)=o$ として良い. $H(\mathfrak{v}_0)$-作用および $H(\mathfrak{v}'_0)$-作用の境界における固定点を x とすると, 固定点 x は unique であるので, $f(x)=x$. すなわち $f\in K_0$ であり, f によって $\mathfrak{v}_0$ と $\mathfrak{v}'_0$ は共役. ■

この定理によって, 階数 1 の場合には, 全測地的でない singular orbit をもつ cohomogeneity one action を分類するためには, $(*)$ をみたす $\mathfrak{v}_0\subset\mathfrak{v}$ を分類すれば良いことが分かった (up to K_0-conjugation). 次節以降はそれぞれの階数 1 対称空間について, 個々に調べて行く.

注意. 定理 3.1 は階数が高い場合には成立しない. 我々は, $\mathfrak{h}\not\subset\mathfrak{k}_0+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ であるが, H-作用は singular orbit が全測地的でない cohomogeneity one action である, という例を構成した (これについては本稿では述べないことにする).

4 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$-case

$\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ への cohomogeneity one action は Cartan ([6]) によって分類された. そのような作用は $n+1$ 個あり, singular orbit を持たないものが 2 個, singular orbit F がある場合にはそれらは全て全測地的である ($F=\mathrm{pt},\mathbb{R}\mathrm{H}^1,\dots,\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-2}$).

この分類は, 次のようにしても得られる. singular orbit を持たない cohomogeneity one action については [4] で分類されている. cohomogeneity one action が singular orbit F を持ったとすると, F は等質かつ極小である. さらに, $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の等質極小部分多様体は全測地的であることが知られている (Di Scala and Olmos [7]). よって, $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の全測地的部分多様体の分類より, cohomogeneity one action の分類が得られる.

前節の結果より, 上記の結果の別証明が得られる.

定理 4.1 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ への cohomogeneity one action の singular orbit は全測地的である.

証明. H の $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ への作用が cohomogeneity one であり, 全測地的でない singular orbit を持つと仮定する. 定理 3.1 より, $\mathfrak{v}_0\subset\mathfrak{v}$ が存在して H-作用は $H(\mathfrak{v}_0)$-作用と orbit equivalent. ここで $k:=\dim\mathfrak{v}_0$ とすると, $H(\mathfrak{v}_0)$-作用の singular orbit は $H(\mathfrak{v}_0)\cdot o=\mathbb{R}\mathrm{H}^{k+1}$ であり, これは全測地的であるので矛盾. ■

5 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$-case

定義 5.1 $\mathfrak{v}_0\subset\mathbb{C}^{n-1}$ の $x\in\mathfrak{v}_0$ における Kähler angle を, Jx と $\mathfrak{v}_0$ のなす角度で定義する. ここで J は $\mathbb{C}^{n-1}$ の自然な complex structure.

このとき, $\mathfrak{v}_0$ が $(*)$ を満たすことと constant Kähler angle を持つ (i.e., $\mathfrak{v}_0$ の Kähler angle が x に依らず一定) ことは同値であることが分かる.

定理 5.2 $\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ を $\mathbb{C}^{n-1}$ の複素正規直交基底とする． このとき, $(*)$ を満たす $\mathfrak{v}_0 \subset \mathbb{C}^{n-1}$ は次のいずれかに共役:

$\dim \mathfrak{v}_0 = 2k+1$ のとき, $\mathfrak{v}_0 \cong \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1,\ldots,e_{2k+1}\}$,

$\dim \mathfrak{v}_0 = 2k$ のとき, $\mathfrak{v}_0 \cong \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \cos\theta i e_1 + \sin\theta e_2, \ldots, e_{2k-1}, \cos\theta i e_{2k} + \sin\theta e_{2k}\}$.

$\mathfrak{v}_0$ が偶数次元の場合, $\theta = 0$ ならば複素部分空間, $\theta = \pi/2$ ならば全実部分空間. このような場合, $(*)$ をみたす $\mathfrak{v}_0$ は非可算無限個あり, 従って $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への cohomogeneity one action も非可算無限個ある.

6 $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$-case

四元数双曲空間 $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$ に関しては, 我々はまだ cohomogeneity one action の分類を完成させていない. 複素の場合の Kähler angle に相当する良い不変量を見つける必要があると思われるので, その候補を紹介する. しかし, この不変量は複雑で扱いは容易ではない.

定義 6.1 $\mathbb{H}^{n-1}$ の quaternion structure を J_1', J_2', J_3' とし, $S := \{aJ_1' + bJ_2' + cJ_3' \mid a^2+b^2+c^2\}$ とおく. $\mathfrak{v}_0 \subset \mathbb{H}^{n-1}$ と $x \in \mathfrak{v}_0$ に対し次が成立:

(1) $\exists J_1 \in S:$ $J_1 x$ と $\mathfrak{v}_0$ のなす角度 θ_1 が最小,

(2) $\exists J_3 \in S:$ $J_3 x$ と $\mathfrak{v}_0$ のなす角度 θ_3 が最大,

(3) $\exists J_2 \in S:$ $\{J_1, J_2, J_3\}$ は quaternion の関係式を満たす.

ここで θ_2 を $J_2 x$ と $\mathfrak{v}_0$ のなす角度としたとき, $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ を $\mathfrak{v}_0$ の x における *quaternionic Kähler angle* と呼ぶ.

$\mathfrak{v}_0$ が $(*)$ を満たすなら, quaternionic Kähler angle は x によらず一定である. このことは容易. しかし, 与えられた $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ を constant quaternionic Kähler angle に持つ $\mathfrak{v}_0$ が存在しないこともあり, 取り扱いは複雑である. 詳細は [3] 参照.

7 $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$-case

Cayley 数は四元数より複雑であるが, 対応する対称空間が $n=2$ の場合しか無いので, $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$ への cohomogeneity one action を分類することが出来る.

定理 7.1 $\mathfrak{v}_0 \subset \mathbb{O}$ が $(*)$ を満たす為の必要十分条件は, $\dim \mathfrak{v}_0 = 1,2,3,4,6,7,8$ であること. また, $K_0 = \mathrm{Spin}(7)$ の $G_k(\mathbb{R}^8)$ への作用は, $k=4$ のとき cohomogeneity one であり orbit space は $[0,1]$ と同相, $k \neq 4$ のときは transitive.

この定理より, $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$ への cohomogeneity one action の moduli は,

$$\mathcal{M} \cong \{F_1, F_2\} \cup \{2,3,6,7,8\} \cup [0,1]$$

と表せることが分かる．ここで各元に対応する cohomogeneity one action は, F_1, F_2 は singular orbit を持たないもの, $k = 2,5,6,7,8$ は余次元 k の singular orbit を持つもの, 閉区間 $[0,1]$ は余次元 4 の singular orbit を持つもの．ちなみに $k = 8$ に対応する cohomogeneity one action の singular orbit は全測地的 $\mathbb{O}\mathrm{H}^1$.

参考文献

[1] D.V. Alekseevsky and A.J. Di Scala, Minimal homogeneous submanifolds of symmetric spaces, in: *Lie groups and symmetric spaces: in memory of F.I. Karpelevich* (Ed. S.G. Gindikin), Amer. Math. Soc. Transl. (2) 210 (2003), 11-25.

[2] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.* **229** (1998), 589-600.

[3] J. Berndt and M. Brück, Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209–235.

[4] J. Berndt and H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **63** (2003), 1-40.

[5] J. Berndt and H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, to appear in *Tôhoku Math. J.*

[6] E. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Ann. Mat. pura appl. IV. s.* **17** (1938), 177-191.

[7] A.J. Di Scala and C. Olmos, The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space, *Math. Z.* **237** (2001), 199-209.

[8] P. B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, 1996.

[9] W.-Y. Hsiang and H.B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differential Geom.* **5** (1971), 1-38.

[10] A. Kollross, A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 571-612.

[11] R. Takagi, On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 495-506.