対称空間の対称部分多様体

お茶の水女子大学理学部　塚田 和美

対称部分多様体は部分多様体論における対称空間のアナロジーとして定義される. このような部分多様体についての研究は, １９７０年代頃から始められ, １つの目標であった対称空間の対称部分多様体の分類は, ドイツ, 日本を中心とする研究者の寄与を経て, 最近の Berndt-Eschenburg-内藤-塚田 ([1]) の研究によって完成した. この講演では, 対称部分多様体の理論が対称空間のそれとの類似性をもっていかに展開されるか,Grassmann 幾何による分類の枠組み等について解説したい.

1　対称部分多様体と平行部分多様体

対称部分多様体は部分多様体論における対称空間のアナロジーとして次のように定義される.

定義 1.1 連結 *Riemann* 多様体 M の連結（正則）部分多様体 S は, S の各点 p で次の性質を満たす M の等長変換 t_p が存在するとき, **対称部分多様体**とよばれる*:*

$$t_p(p) = p, \quad t_p(S) = S, \quad (t_p)_* X = -X \ \ (X \in T_p S), \quad (t_p)_* \xi = \xi \ \ (\xi \in T_p^{\perp} S)$$

ここで　$T_p S$, $T_p^{\perp} S$ はそれぞれ S の点 p における接空間, 法空間を表す.

上記定義における等長変換 t_p を**外的対称変換 (extrinsic symmetry)** と呼ぶ. 対称部分多様体の理論を構成するのに都合の良いように, 対称埋入（symmetric immersion）の概念も導入しておく.

定義 1.2 連結 *Riemann* 多様体 S から連結 *Riemann* 多様体 M への等長埋入（*isometric immersion*）$f : S \to M$ は, S の各点 p で次の性質を満たす S の等長変換 s_p 及び M の等長変換 t_p が存在するとき, **対称埋入**とよばれる*:*

$$s_p(p) = p, \quad t_p \circ f = f \circ s_p, \quad \text{（これによって} \quad t_p(f(p)) = f(p) \text{ ）}$$

$$(t_p)_* f_* X = -f_* X \ \ (X \in T_p S), \quad (t_p)_* \xi = \xi \ \ (\xi \in T_p^{\perp} S)$$

局所版の概念である局所対称部分多様体, 局所対称埋入も同様に定義される（詳細は省く）. 対称部分多様体（resp. 局所対称部分多様体）の包含写像は対称埋入（resp. 局所対称埋入）になっている. 以上の定義から, 対称部分多様体（あるいは対称埋入をもつ Riemann 多様体）は Riemann 対称空間であり, 局所対称部分多様体（あるいは局所対称埋入をもつ Riemann 多様体）は局所 Riemann 対称空間であることが分かる.

局所 Riemann 対称空間に関する基本的な事実
• 局所 Riemann 対称空間であるための必要十分条件は $\nabla R = 0$
• 局所 Riemann 対称空間は, 1点におけるその曲率テンソル R の形で決定される.
に対応する対称部分多様体の性質を論じよう.

命題 1.3 $f : S \to M$ を局所対称埋入であるとする. このとき, f の第2基本形式 α は平行即ち $\bar{\nabla}\alpha = 0$. また,S の各点 p に対して $f_* T_p S$, $T_p^{\perp} S$ は,$T_{f(p)}M$ の曲率不変部分空間である. 即ち M の曲率テンソル R に対して

$$R(f_* T_p S, f_* T_p S) f_* T_p S \subset f_* T_p S, \qquad R(T_p^{\perp} S, T_p^{\perp} S) T_p^{\perp} S \subset T_p^{\perp} S$$

をみたす.

上の事実は,S の各点 p に対し,$\bar{\nabla}\alpha, R$ が t_{p*} 不変であることに注意すれば容易に分かる. 第2基本形式 α が平行となる部分多様体（resp. 等長埋入）を**平行部分多様体**（resp. **平行埋入**）という.
平行埋入に対する剛性定理を述べる.

定理 1.4 (cf. 内藤 [10]) *S_1 を単連結完備 Riemann 多様体, S_2 を完備 Riemann 多様体, $f_i : S_i \to M$ $(i = 1, 2)$ を平行埋入, α_i (i=1,2) を f_i の第2基本形式とする. さらに 点 $p_1 \in S_1, p_2 \in S_2$, 線形等長写像 $\phi : T_{p_1} S_1 \to T_{p_2} S_2$ が存在して次の条件を満たしていると仮定する：*

$$f_1(p_1) = f_2(p_2), \quad f_{2*p_2} \circ \phi = f_{1*p_1}, \quad \alpha_2(\phi X, \phi Y) = \alpha_1(X, Y) \quad X, Y \in T_{p_1} S_1$$

このとき S_1 から S_2 の上への Riemann 被覆写像 Φ が存在して

$$\Phi(p_1) = p_2, \quad \Phi_{*p_1} = \phi, \quad f_2 \circ \Phi = f_1$$

が成立する.

上記定理の局所版も成り立つが, 詳細は略. 上記定理は1点における第2基本形式の "形" によって平行埋入（平行部分多様体）は決定されることを意味している.

命題 1.3 の逆は, M が局所 Riemann 対称空間であるときには成立する.

定理 1.5 (内藤 [12]) *M を局所 Riemann 対称空間, $f : S \to M$ を等長埋入であるとする. f の第2基本形式 α は平行で, かつ S の各点 p で $T_p^{\perp} S$ は,$T_{f(p)}M$ の曲率不変部分空間であるとする. このとき $f : S \to M$ は局所対称埋入である.*

注意 $\bar{\nabla}\alpha = 0$ であるから, Codazzi 方程式により $f_* T_p S$ は曲率不変であることが分かる. また, 局所 Riemann 対称空間 M の点 p において $T_p M$ の部分空間 V 及びその直交補空間 $V^{\perp}$ が曲率不変であるとする. このとき, 線形等長変換 $\lambda : T_p M \to T_p M$ で,$\lambda(X) = -X$ $(X \in V)$, $\lambda(\xi) = \xi$ $(\xi \in V^{\perp})$ をみたすものをとれば, 曲率テンソル R は λ-不変 即ち $\lambda(R(X, Y)Z) = R(\lambda X, \lambda Y)\lambda Z$ $(X, Y, Z \in T_p M)$. 局所 Riemann 対称空間に関するよく知られた事実により, 点 p の近傍で定義された局所等長変換 t_p で $t_p(p) = p$, $t_{p*_p} = \lambda$ を満たすものが存在する.

定理 1.4, 定理 1.5 ともに, Strübing によって示された平行部分多様体の測地線に関する次のような興味深い事実が本質をなしている.
設定は以下の通り：S を Riemann 接続 ∇ をもつ Riemann 多様体, $f: S \to M$ を等長埋入とし,$\nabla^{\perp}$ を $T^{\perp}S$ に導入された法接続とする. $\gamma: I \to S$ を弧長でパラメータ表示された S の測地線とし, $c = f \circ \gamma : I \to M$ を M におけるその像とする. さらに f の第 2 基本形式 α は, γ にそって平行であるとする. すなわち,

> γ にそって ∇ に関して平行な S の任意のベクトル場 X, Y に対して $\alpha(X, Y)$ は
> $\nabla^{\perp}$ に関して平行な法ベクトル場となる.

以上の設定で次が成立する.

定理 1.6 (Strübing [20]) *自然数 r が存在して, $c = f \circ \gamma : I \to M$ は M の接触次数が r の Frenet 曲線になる. さらに,γ にそって ∇ に関して平行な S のベクトル場 $E_1, E_2, \cdots, E_r$ (線形独立とは限らない) が存在し, $\kappa_1, \cdots, \kappa_{r-1}$ を c の曲率関数, $V_1, \cdots, V_r$ を c の Frenet 標構とすれば次が成立する.*
a) 各 κ_i $(i = 1, \cdots, r-1)$ は定数関数
b) $V_{2i-1} = f_*(E_{2i-1})$
c) $V_{2i} = \alpha(\dot{\gamma}, E_{2i})$
特に V_{2i} は γ に沿う $\nabla^{\perp}$ に関して平行な法ベクトル場となる.
ここで,$\kappa_1, \cdots, \kappa_{r-1}$, $E_1, E_2, \cdots, E_r$ （従って $V_1, \cdots, V_r$ ）は,1 点 $\gamma(t_0)$ における第 2 基本形式 α によって定まる.

著しい点は, 曲率 $\kappa_1, \cdots, \kappa_{r-1}$ が定数関数になること,Frenet 標構のうち, 奇数番目のベクトル V_{2i-1} は部分多様体 S の接ベクトルであり, 偶数番目のベクトル V_{2i} は部分多様体の法ベクトルであること,$\kappa_1, \cdots, \kappa_{r-1}$, $V_1, \cdots, V_r$ が,1 点 $\gamma(t_0)$ における第 2 基本形式 α で定まってしまうことである.

Riemann 対称空間に関するよく知られた事実
• Riemann 対称空間は等質 Riemann 多様体である.
に対応する対称部分多様体の性質は,Riemann 多様体 M の同変等質部分多様体となることである. 即ち,S の外的対称変換から生成される M の等長変換の群が S に推移的に作用する. この主題については, 論文 [12] の中で内藤によって詳しく論じられている.

2 Grassmann 幾何と対称部分多様体の分類

命題 1.3 で示された対称部分多様体のもつもう 1 つの性質: 接空間 T_pS, 法空間 $T_p^{\perp}S$ の曲率不変性に注目しよう. 接空間 T_pM に線形部分空間 V が存在して V 及び $V^{\perp}$ ともに曲率不変となることは一般の Riemann 多様体 M においては, どの程度起こり得ることだろうか？M が Riemann 対称空間である場合には T_pM の曲率不変部分空間 V に対して, V に接する完備全測地的部分多様体 N が一意的に存在することが知られている. 特に, 対称部分多様体 S に対しては, T_pS, $T_p^{\perp}S$ にそれぞれ接する全測地的部分多様体 N ,N^* が存在する. 先の定理 1.5 によって, N は M の対称部分多様体であることが分かる（N^* も同じく対称部分多様体である）. (M, N) を (M, S) に付随する全測地的対称部分多様体という.

上で見たように, 対称部分多様体はその接空間が " 特別な" ものになっている部分多様体である. このような部分多様体を一般的に扱う枠組みが Harvey-Lawson ([7]) によって導入された Grassmann 幾何の考え方である. M を m 次元 Riemann 多様体とし, $1 \leq n \leq m$ なる n を固定する. M の各接空間における n 次元線形部分空間全体からなる M 上の Grassmann 束を $Gr_n(TM)$ とし, その部分集合 $\mathcal{S}$ を固定する. M の n 次元部分多様体 S (あるいは 等長埋入 $f : S \to M$) の各点 p の接空間 T_pS (あるいは f_*T_pS) が集合 $\mathcal{S}$ に属するとき, その部分多様体を **$\mathcal{S}$-部分多様体** と呼び, $\mathcal{S}$-部分多様体の族を **$\mathcal{S}$-幾何**と呼ぶ. Grassmann 幾何はこのような $\mathcal{S}$-幾何の総称である.

Riemann 対称空間の対称部分多様体を Grassmann 幾何の枠組みで論じよう.Riemann 多様体 M に連結 Lie 群 G が等長的に働くとき, 各等長変換の微分を通し G は Grassmann 束 $Gr_n(TM)$ に自然に作用する. この作用の G -軌道を $\mathcal{S}$ とした Grassmann 幾何を **軌道型**と呼ぶ. ここでは,M を単連結半単純 Riemann 対称空間,G を M の等長変換群の単位連結成分とした場合の軌道型 Grassmann 幾何を考える. 特に全測地的対称部分多様体 (M, N) に対して, N の接空間 T_pN $(\in Gr_n(TM))$ の G -軌道 $\mathcal{O}$ をとる.N に接する対称部分多様体 S はその同変性によって $\mathcal{O}$-部分多様体になることが分かる. 即ち $\mathcal{O}$-幾何に属する.

全測地的対称部分多様体 (M, N) に随伴する $\mathcal{O}$-幾何については, 実空間型（定曲率 Riemann 多様体）の部分多様体論と同様の一般的理論を構築することができる. その著しい点は,
• 第 2 基本形式 α の "形" の特殊性
• $\mathcal{O}$-部分多様体の存在, 一意性に関わる基本定理が（実空間型の場合と同じく）Gauss 方程式,Codazzi 方程式,Ricci 方程式という基本方程式のみにもとづいて成立する.
（詳細の説明は省く）

$\mathcal{O}$-幾何の視点のもとで,Riemann 対称空間の対称部分多様体の分類のプログラムは次のようになる.

(1) 問題を既約なものに帰着させる分解定理

(2) Euclid 空間の対称部分多様体の分類

(3) 単連結半単純 Riemann 対称空間の全測地的対称部分多様体（特に既約全測地的対称部分多様体 (M, N) の分類）

(4) (3) で分類された各既約 (M, N) に随伴する $\mathcal{O}$-幾何のうち, 全測地的でない対称部分多様体を含むものの決定.

(4)' (3) で分類された各既約 (M, N) に随伴する $\mathcal{O}$-幾何のうち, 全測地的でない $\mathcal{O}$-部分多様体を含むものの決定.

(5) (4) で決定された $\mathcal{O}$ 幾何に属する対称部分多様体の分類

ここで (2) は Ferus ([6]) による.(1),(3),(4)' については, 内藤による一連の論文（[13],[14],[15],[16]）で明らかにされた. 問題の徹底的な代数化（Lie 代数論）による.

内藤による (4)' の結果は次のものである.

定理 2.1 *M をコンパクト型単連結 Riemann 対称空間, $\bar{M}$ をそのノンコンパクト双対とする. 既約全測地的対称部分多様体 $(M, N), (\bar{M}, \bar{N})$ に随伴する $\mathcal{O}$-幾何のうち, 全測地的でない $\mathcal{O}$-部分多様体を許容するものは次の５つの場合に限る：*

(1) $(M, N) = (S^m, S^n)$ または $(\bar{M}, \bar{N}) = (\mathbf{R}H^m, \mathbf{R}H^n)$ *$(1 \leq n < m)$,*

(2) $(M, N) = (\mathbf{C}P^m, \mathbf{C}P^n)$ または $(\bar{M}, \bar{N}) = (\mathbf{C}H^m, \mathbf{C}H^n)$ *$(1 \leq n < m)$,*

(3) $(M,N)=(\mathbf{C}P^m,\mathbf{R}P^m)$ または $(\bar{M},\bar{N})=(\mathbf{C}H^m,\mathbf{R}H^m)$ *(*$2\le m$*),*
(4) $(M,N)=(\mathbf{H}P^m,\mathbf{C}P^m)$ または $(\bar{M},\bar{N})=(\mathbf{H}H^m,\mathbf{C}H^m)$ *(*$2\le m$*),*
(5) 18 種類の既約対称 R-空間に付随するコンパクト型 (M,N) とそのノンコンパクト双対 $(\bar{M},\bar{N})$.

上記プログラムの詳細及び対称部分多様体の分類結果については, 塚田-内藤の論説（[21]）及びその引用文献を参照してほしい.

なお, 定理 2.1 (5) の場合については,$\mathcal{O}$-部分多様体はすべて局所対称部分多様体になる（[1]）.

3 関連する研究と今後の課題

思いつくままにあげる. 問題の重要性や難易度は考慮されていない.

[1] 応用

対称空間の対称部分多様体の分類結果を生かした良い応用があってほしい.

[2] 他の設定での対称部分多様体の分類

等質 Riemann 多様体の対称部分多様体の例としてどんなものがあるだろう？ 対称部分多様体の概念が導入されるためには回帰的等長変換（involutive isometry）の存在が必要であるが, 回帰的等長変換（involutive isometry）をもつ等質 Riemann 多様体にはどんなものがあるか？

擬 Euclid 空間の対称部分多様体の分類. Riemann 対称空間は E.Cartan によって分類されたが, 擬 Riemann 対称空間（計量が不定値である場合）についてはまだ分類が完成されていないように思う. 半単純の場合は Berger による Affine 対称空間の分類理論に含まれる. 半単純でない場合は, Cahen と Parker の研究（[5]）ぐらいしか私は知らない（この件に関わり, 何かご存知の方がいらっしゃればご教示いただきたい）. このような状況で擬 Euclid 空間の対称部分多様体となるような特別な場合を明らかにすることは興味深いのでないかと思う.

擬 Euclid 空間の対称部分多様体については, 擬 Riemann 対称 R-空間の理論と関わって内藤（[11]）, Blomstrom ([2]) らの研究があるが, まだ完全には解明されていないようだ. 半単純でない次のような例が知られている.

$\mathbb{R}^{n+2}$ を非退化対称双１次形式 $\langle , \rangle$ をもつ擬 Euclid 空間とする.

$$\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+2}-\{\mathbf{0}\}\middle|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\tilde{c}\right\}$$

とおく. $\tilde{c}\neq 0$ であるときは, $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ は定曲率 $\frac{1}{\tilde{c}}$ をもつ擬 Riemann 多様体（擬 Riemann 空間型）で, $\tilde{c}=0$ であるときは光錐と呼ばれ, 誘導計量は退化している.

例 1 (Blomstrom [2]) $\boldsymbol{a}$ を $\mathbb{R}^{n+2}$ の光的ベクトル, 即ち $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0$ をみたすベクトルとする.

$$M=\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})\cap\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+2}\middle|\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle=c\right\}$$

とおく. ここで c は零でない定数. M が空集合でなければ, M は $\mathbb{R}^{n+2}$ の対称部分多様体で, 特に $\tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ の全臍的平坦超曲面になっている.

例 2 (cf. Cahen and Kerbrat [4]) 次のような条件をみたす $\mathbb{R}^{n+2}$ の線形変換 A を考える：

(i) A は $\langle , \rangle$ に関して対称変換　即ち $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle$ をみたす.
(ii) $A^2 = 0$
このような A に対して

$$M = \tilde{M}^{n+1}(\tilde{c}) \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+2} | \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = c\}$$

とおく. ここで c は零でない定数. M が空集合でなければ, M は $\mathbb{R}^{n+2}$ の対称部分多様体となる. $\tilde{c} = 0$ のとき, M は誘導計量に関して共形平坦である.

例 3 (Magid [9]) $\mathbb{R}^n_k$ で, 指数 k (符号 $(n-k, k)$) の内積をもつ擬 Euclid 空間 を表す. Magid ([9]) は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^{n+k}_1$, $\mathbb{R}^n_1$ から $\mathbb{R}^{n+2}_1$, $\mathbb{R}^n_1$ から $\mathbb{R}^{n+2}_2$ への平行埋入（このとき対称埋入となることが知られている ([2])）をそれぞれ分類している. 特に $\mathbb{R}^n_1$ から $\mathbb{R}^{n+2}_2$ への場合は全部で 4 系列の平行埋入が存在し, 非自明な興味深い例も含まれている.

例 1 から 例 3 により, 余次元 2 としてもいろいろな対称部分多様体が現れることが分かる. 擬 Euclid 空間の余次元 2 の対称部分多様体の分類, あるいは部分多様体を Lorentz 対称空間に限っての擬 Euclid 空間の対称部分多様体の分類等は実行可能だろうか？（あるいは既に知られているのかもしれないが）.

例 4 擬 Riemann 対称 R-空間の接束. 擬 Riemann 対称 R-空間 M の擬 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ への標準埋め込みは対称部分多様体になっている（内藤 [11]）. その接束 TM も擬 Riemann 対称 R-空間であり, 束準同型 $TM \subset T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ は標準埋め込みとなり,TM は $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ の対称部分多様体になっている. ただし, $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上の擬 Euclid 内積の符号は (n, n) であり, TM に誘導された擬 Riemann 計量の符号も (m, m) $(m = \dim M)$ である.

その他興味深い例がもっとたくさんあるのではないかと思う. 内藤の研究（[11]）が発展させられるべきであろう.

[3] 対称空間の Grassmann 幾何, 平行部分多様体

Riemann 対称空間の部分多様体で, 全測地的部分多様体に随伴する Grassmann 幾何に属するものは良い研究対象だろう. Burstall, Hertrich-Jeromin, Pedit, Pinkall ([3]) の研究で **curved flats** と呼ばれる部分多様体は平坦全測地的部分多様体に随伴する Grassmann 幾何に属するものである.Helgason 球面に随伴する Grassmann 幾何はどんな展開をもつだろうか？コンパクト単純 Lie 群 G の最高ルートから構成される 3 次元 Lie 部分群 G_1 に随伴する Grassmann 幾何について大仁田-田崎 ([17]) は興味深い結果を得ている. そのような Grassmann 幾何に属する部分多様体は G_1 に局所合同になるというものである. このような現象の起こる背景はなんだろうか？

§1 で述べたように対称部分多様体は平行部分多様体だが, 平行部分多様体がすべて対称部分多様体になるというわけではない. Riemann 対称空間の平行部分多様体の研究は対称部分多様体の研究の延長線上にあり, また平行部分多様体は全測地的部分多様体に随伴する Grassmann 幾何に属している.

[4] Symmetric-like submanifolds

Symmetric-like Riemannian manifolds と呼ばれる Riemann 対称空間の様々に一般化された class がある. この部分多様体版を考える課題はどうだろう？　例えば, Sánchez ([18],[19]), Kowalski, Kulich ([8]) による Euclid 空間内の k-対称部分多様体論の研究がある. その他

Symmetric-like Riemannian manifolds として知られているものに,weakly symmetric spaces, Riemannian g.o. spaces, D'Atri spaces, $\cdots$ などがある. これらの部分多様体版はどう設定すればよいだろう？

参考文献

[1] J. Berndt,J.H. Eschenburg, H. Naitoh,and K. Tsukada:*Symmetric submanifolds associated with the irreducible symmetric R-spaces*,to appear in Math. Ann.

[2] C. Blomstrom:*Symmetric immersions in Pseudo-Riemannian space forms*,Lecture Notes in Math.,1156(1985),30-45

[3] F.E. Burstall, U.Hertrich-Jeromin, F.Pedit and U.Pinkall:*Curved flats and isothermic surfaces*, Math. Z.,225(1997),199-209

[4] M.Cahen and Y.Kerbrat:*Domaines symmétriques des quadriques projectives*, J. Math. Pures et Appl., 62(1983),327-348

[5] M.Cahen and M.Parker:*Pseudo-riemannian symmetric spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 24(1980),no.229

[6] D. Ferus: *Symmetric submanifolds of Euclidean space*, Math. Ann. 247(1980), 81-93

[7] R.Harvey and H.B.Lawson: *Calibrated geometries*, Acta Math. 148(1982), 47-157

[8] O.Kowalski and I.Kulich: *Generalized symmetric submanifolds of Euclidean spaces*, Math. Ann. 277(1987),67-78

[9] M. Magid: *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms*, Tsukuba J. Math. 8(1984), 31-54

[10] H. Naitoh: *Totally real parallel submanifolds in* $P^n(c)$, Tokyo J. Math. 4(1981), 279-306

[11] H. Naitoh: *Pseudo-Riemannian symmetric R-spaces*, Osaka J. Math. 21(1984), 733-764

[12] H. Naitoh: *Symmetric submanifolds of compact symmetric spaces*, Tsukuba J. Math. 10(1986), 215-242

[13] H. Naitoh: *Compact simple Lie algebras with two involutions and submanifolds of compact symmetric spaces I, II*, Osaka J. Math. 30(1993), 653-690, 691-732

[14] H.Naitoh: *Grassmann geometries on compact symmetric spaces of general type* , J. Math. Soc. of Japan 50(1998), 557-592

[15] H.Naitoh: *Grassmann geometries on compact symmetric spaces of exceptional type* , Japanese J. Math. 26(2000), 157-206

[16] H.Naitoh: *Grassmann geometries on compact symmetric spaces of classical type* , Japanese J. Math. 26(2000), 219-319

[17] Y.Ohnita and H.Tasaki: *Uniqueness of certain 3-dimensional homologically volume minimizing submanifolds in compact simple Lie groups*, Tsukuba J. Math. 10(1986), 11-16

[18] C.U. Sánchez: *k-symmetric submanifolds of* $\mathbb{R}^N$, Math. Ann. 270(1985),297-316

[19] C.U. Sánchez: *Extrinsic $2r$-symmetric submanifolds of* $\mathbb{R}^N$ *, general structure*, Geom. Dedicata. 22(1987), 39-47

[20] W.Strübing: *Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds*, Math. Ann. 245(1979), 37-44

[21] 塚田和美, 内藤博夫: **対称空間の対称部分多様体の分類**, 数学 55(2003),266-281