リーマン多様体の等長埋め込み論外史*

An unofficial History on the Theory of Isometric Imbeddings of Riemannian Manifolds

広島大学大学院 理学研究科　阿賀岡 芳夫
agaoka@hiroshima-u.ac.jp

概 要

We present principal events appeared in the theory of isometric imbeddings of Riemannian manifolds in chronological order, mainly concerning with the existence or non-existence of isometric imbeddings into low dimensional Euclidean spaces.

研究集会では “対称空間の等長埋め込み” という題目で講演しました．しかし対称空間に関する主な結果は，共同研究者の兼田英二氏と共著で ‘数学’ の論説 (第 **56** 巻 (2004) 400–417) に纏めたばかりなので，ここではタイトルを変え，初日にお話ししたリーマン多様体の局所的あるいは大域的な等長埋め込みの存在・非存在に関する主要な結果を時の流れに従い並べてみることにしました．等長埋め込みの問題に関し，現在何がわかって何がわかっていないのか，この流れの中で全体の輪郭を把握していただけたらと願っています．

ただ特に古い出来事については，原典が入手不可能であったり，あるいは入手できても私にはそれが読めないということが多く，その場合は自分で内容を確認せず，安易な方法で申し訳ないのですが他の文献からの孫引きですませてしまいました．文献により記述に矛盾の生ずることもあり，何を信用すればよいのか判断の付きかねることも多々ありました．また最近の結果であっても，私の力不足で内容の正当性が確認できず，論文の記述をそのまま写しただけの項目が多くあります．私の好みにより，各論文のコメントに濃淡が生じていますし，中には著者の意図に反した文脈で等長埋め込みの歴史に強引に含めてしまった項目もあります．結果的に個人的な価値判断が前面にでたものになってしまった点が，題目を ‘外史’ とした所以です．間違い・重要事項の記載漏れ等について何か気付かれた場合，遠慮なくご指摘頂きますようお願い申し上げます．等長埋め込み論の歴史を概観するためには，数学力＋最低限でも日英独仏露伊語の文献を理解する力量が要求され，こ

* 2005 年 2 月初稿; 2008 年 5 月改訂; 2012 年 11 月再改訂; 2017 年 12 月再微改訂

れは私の能力をはるかに越えた作業であることを痛感しています．本稿は様々な点において不完全なものではありますが，私の意を汲んで頂ければ幸いです．

リーマン多様体の等長埋め込み問題全般に関する歴史については次の著作に詳しく記されています．本稿を書くにあたって，これらの著作を参考にさせていただきました．

[1] A. A. Borisenko, Isometric immersions of space forms into Riemannian and pseudo-Riemannian spaces of constant curvature, Russian Math. Surveys **56**(3) (2001), 425–497.

[2] B. Y. Chen, Riemannian submanifolds, in "Handbook of Differential Geometry Vol.I" (ed. F. J. E. Dillen, L. C. A. Verstraelen), 187–418, Elsevier Science, Amsterdam, 2000.

[3] M. L. Gromov and V. A. Rokhlin, Embeddings and immersions in Riemannian geometry, Russian Math. Surveys, **25**(5) (1970), 1–57.

[4] 松本誠, Riemann 空間の局所的 imbedding について I, II, 数学, **5** (1953), 210–219; **6** (1954), 6–16.

[5] É. G. Poznyak and D. D. Sokolov, Isometric immersions of Riemannian spaces in Euclidean spaces, J. Soviet Math., **14** (1980), 1407–1428.

[6] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol.V, Publish or Perish, Boston, 1975.

また、次の文献にも等長埋め込み論に関する初期の歴史が記されています．

M. Pavšič, V. Tapia, Resource letter on geometrical results for embeddings and branes, arXiv:gr-qc/0010045 (2000).

ここには相対論などの物理学的視点から，膨大な文献が引用されています．

本文では敬称をすべて省略しました．微分可能性の程度 (C^1-級, C^2-級, $\cdots$) については解析学的に重要な問題ですが，ここでは簡単のため C^∞-級とするか, あるいは何も記さずにすませてしまったところが数多くあります．正確な主張については原論文にあたってみて下さい．

では，年代順に出来事を並べます．いつ等長埋め込み論の歴史が始まったと見なすかが既に一つの問題ですが，ここでは最大の敬意をもって，ガウスから始めることにします．

- C. F. Gauss　1827　Disquisitiones generales circa superficies curvas (曲面に関する一般的考察), 全集 IV 217–258.

  [いわゆるガウスの "曲面論". 寺阪英孝・静間良次, 19 世紀の数学　幾何学　, 共立出版 (1982) に翻訳があります.]

- G. F. B. Riemann　1854　Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (幾何学の基礎にある仮説について), Abh. Kön. Gesells. Wiss. Göttingen **13** 133–150.

  [教授資格取得講演 (6 月 10 日, ゲッチンゲン). 出版は 1867 年. 邦訳がいくつかあります. Nash の論文 (1956) の参考文献には, このガウス, リーマンの仕事が最初に二つ並べて挙げられ, 更に一人おいてヒルベルトの 1901 年の仕事が置かれています. ガウスもリーマンも, 今更ここで語る必要はないでしょう.]

- E. Beltrami　1868　Teoria fondamentale degli spazzi di curvatura costante (定曲率空間の基本定理), Ann. di Mat. Pura Appl. (2) **2** 232–255.

  [(非完備) 2 次元負定曲率空間を $\mathbf{R}^3$ 内の回転面として実現. ただし E. R. Rozendorn の Surfaces of negative curvature (Encyclopaedia of Math. Sci. **48**, Geometry III, Springer (1992), p.90) によると 1839 年に F. Minding (J. Reine Angew. Math. **19** 370–387) が既にこのような例を見つけていたとの記述があります. 井ノ口順一, 負定曲率曲面とサイン・ゴルドン方程式 (曲面の微分幾何学とソリトン方程式 — 可積分幾何入門 —, 立教大学 SFR 自由プロジェクト研究 講究録 **8** (2005), 第 1 章) とその文献も参照して下さい. Minding の仕事については, コルモゴロフ–ユシュケヴィッチ編「１９世紀の数学 II」(小林昭七監訳) 朝倉書店 (2008) に詳しい記述があります.]

- L. Schlaefli　1871　Nota alla Memoria del sig. Beltrami, ((Sugli spazzi di curvatura costante)), Ann. di Mat. Pura Appl. (2) **5** 178–193.

  [問題提起：n 次元リーマン多様体は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次元のユークリッド空間へ等長に埋め込めるか. 等長埋め込みを表す偏微分方程式系 $g_{ij} = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \frac{\partial f^k}{\partial x_i}\frac{\partial f^k}{\partial x_j}$ は, この次元において未知関数の個数と方程式の個数とが一致する決定系となります.]

- R. Beez　1876　Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung (高次元多様体の曲率の理論), Z. Math. Phys. **21** 373–401.

  [$\mathbf{R}^n$ の超曲面論. $n \geq 4$ なら generic な超曲面は剛性をもつ.]

- G. Ricci　1884　Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche, Ann. di Mat. Pura Appl. (2) **12** 135–167.

  [クラス数 = 'ユークリッド空間に等長に埋め込める M の最小余次元' を定義. 既にこの頃から等長埋め込み可能な最小次元を決定せよ, という問題意識があったことになります. 多様体という概念が確立される遙か前の話です.]

- F. Schur　1886　Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses, Math. Ann. **27** 163–176.

[負定曲率空間 H^n から $\mathbf{R}^{2n-1}$ への局所等長埋め込みを構成．具体的な式が与えられています．実解析的なカテゴリーにおいては，H^n から $\mathbf{R}^{2n-1}$ への局所等長埋め込みは 1 変数関数 $n(n-1)$ 個分の自由度があり (E. Cartan)，剛性からはかけ離れた状況にあります. 兼田英二は 倉西正武–H. Goldschmidt 流 formulation のもとで, 別証明を与えました (J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979) 269–284). そこでは H^n から $\mathbf{R}^{2n-1}$ への等長埋め込みを表す微分方程式系を 1 回延長すれば involutive になること, ガウス方程式の解の自由度は $n(n-1)$ (群作用を除いた本質的な自由度は $n-1$) であることが示されています.]

- D. Hilbert 1901 Ueber Flächen von Constanter Gaussscher Krümmung, (On surfaces of constant negative curvature), Trans. Amer. Math. Soc. **2** 87–99.

  [完備な 2 次元負定曲率空間を $\mathbf{R}^3$ へ C^4-級等長にはめ込むことはできない．幾何学の基礎 (第 7 版, 1930) の付録 V に同じ結果が紹介されています (初版は 1899 年に出版)．邦訳：ヒルベルト 幾何学の基礎　現代数学の系譜 7 共立出版 (1970) 194–202. この論文が発表された翌年, E. Holmgren (C.R. Acad. Sci. **134** (1902) 740–743) が別証明を与えています．ヒルベルトの結果は N. V. Efimov により微分可能性を弱めた形で次のように拡張されました：ガウス曲率が $K \le -c$ (c は正の定数) を満たす完備な 2 次元リーマン多様体は $\mathbf{R}^3$ へ C^2-級等長にはめ込めない (Mat. Sbornik **64** (1964) 286–320. 英訳が AMS Transl. Ser.2 **66** (1968) 154–190 にあります．Efimov の結果については T. K. Milnor (Adv. in Math. **8** (1972) 474–543) による詳しい解説があります)．M. Berger の A Panoramic View of Riemannian Geometry (Springer, 2003) p.52 には Hilbert's theorem is of fundamental historical importance. It explains why hyperbolic geometry has to be defined abstractly, and can never be obtained as the inner geometry of a surface in $\mathbb{E}^3$. とあります.]

- G. Fubini 1903 Sulle metriche definite da una forma Hermitiana, Atti Ist. Veneto **6** 501–513.

  E. Study 1905 Kürzeste Wege im komplexen Gebiet, Math. Ann. **60** 321–377.

  [いわゆる Fubini-Study 計量を複素射影空間 $P^n(\mathbf{C})$ に導入.]

- A. Einstein 1916 Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (一般相対性理論の基礎), Ann. Phys. **49** 769–822.

  [一般相対性理論を提唱. 前田恵一, 百寿を迎えた一般相対性理論, 数理科学 2015 年 12 月号よると, 正確には 1915 年 11 月 25 日に提唱したとのことです. 特殊相対性理論は 1905 年に発表されています. 物理方面での等長埋め込みに関する論文は相当数あります.]

- E. Kasner 1921 The impossibility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions, Amer. J. Math. **43** 126–129.

  [平坦でない 4 次元 Einstein 時空は 5 次元平坦空間には等長に埋め込めない. しかしこの証明は, 私にはどう見ても間違っているとしか思えません. 改めて P. Szekeres が証明を与えています (IL Nuovo Cimento A **43** (1966) 1062–1076).]

- E. Kasner 1921 Finite representation of the solar gravitational field in flat space of six dimensions, Amer. J. Math. **43** 130–133.

  [4 次元 Schwarzschild 時空を $\mathbf{R}^{2,4}$ へ等長に埋め込む. 符号数 $(1,3)$ の空間を符号数 $(2,4)$ の空間へ埋め込んでいます. C. Fronsdal (Phys. Rev. **116** (1959) 778–781) は同じ時空を符

号数 $(1,5)$ の空間へ埋め込んでいます．Schwarzschild 時空から余次元 2 となる平坦空間への等長埋め込みについては T. Fujitani–M. Ikeda–M. Matsumoto が更に詳しく研究しています (J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961) 43–61; 63–70; 255–269.]

- J. A. Schouten, D. J. Struik 1921 On some properties of general manifolds relating to Einstein's theory of gravitation, Amer. J. Math. **43** 213–216.

  [Ricci 平坦だが平坦でない n 次元リーマン多様体は $\mathbf{R}^{n+1}$ へ等長に埋め込めないことを証明．つまり，$\mathbf{R}^{n+1}$ の Ricci 平坦な超曲面は平坦.]

- H. W. Brinkmann 1923 On Riemann spaces conformal to Euclidean space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **9** 1–3.

  [共形平坦な空間のクラス数は 2 以下であることを証明.]

- L. Bianchi 1924 Lezioni di Geometria Differenziale, Vol.II, Parte II, Bologna, Nicola Zanichelli, 554–555.

  [H^n $(n \geq 3)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ へ等長に埋め込めないことを証明.]

- M. Janet 1926 Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien, Ann. Soc. Polon. Math. **5** 38–43.

  E. Cartan 1927 Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien, Ann. Soc. Polon. Math. **6** 1–7.

  [n 次元実解析的なリーマン多様体は $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ へ実解析的に局所等長埋め込み可能であることを証明．Janet の証明には初期条件の設定に関して不十分な点があり，1931 年に C. Burstin (Rec. Math. Soc. Math. Moscou (Math. Sbornik) **38** no.3-4, 74–85) が証明を補っています．Janet の 1 年後に同じ雑誌に全く同じタイトルで Cartan の論文が載るというのは一体何があったのでしょうか．M. A. Akivis, B. A. Rosenfeld, *Élie Cartan* (1869–1951), Transl. Math. Monographs **123** AMS (1993) p.185 には自分の方法に対する Janet のこだわりが述べられていて，私には大変興味深く感じられました．K. Leichtweiss による別証明もあります (Math. Ann. **130** (1956) 442–474).]

- E. Cartan 1926–27 Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. Math. France **54** 214–264; **55** 114–134 等.

  [対称空間の導入・分類．ちなみに，カルタン全集ではこの論文は Partie I — Groupes de Lie に収められています．話はそれますが，Spivak は [6] の文献欄でカルタン全集について，Few have read his works, many pretend to have read them, and every one agrees that every one should read them. と記しています.]

- S. Cohn-Vossen 1927 Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 125–134.

  [コーン–フォッセンの定理：卵形面 (正のガウス曲率をもつ $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな曲面) は剛性をもつ．Cohn-Vossen は実解析的な場合にこの定理を示しましたが，後 O. K. Zhitomirsky (Dokl. Akad. Nuak SSSR **25** (1939) 347–349), G. Herglotz (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **15** (1943) 127–129), R. Sacksteder (J. Math. Mech. **11** (1962) 929–939) 達が微

分可能性の仮定を弱めた簡単な証明を発表しています. 一方, 卵形面に任意の小さな穴をあけるとそれは変形可能であることが知られています. 詳しくはヒルベルト・コーン–フォッセンの「直観幾何学」(1932) 第 4 章 32 節を参照して下さい. [6] にも剛性に関する詳しい記述があります.]

- L. Bieberbach 1932 Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum, Comm. Math. Helv. **4** 248–255.

  [H^2 から $\mathbf{R}^N$ への等長埋め込みで, H^2 の等長変換群に関して同変なものは存在しない.]

- K. H. Weise 1934 Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen, Math. Ann. **110** 522–570.

  T. Y. Thomas 1936 Riemann spaces of class one and their characterization, Acta Math. **67** 169–211.

  N. A. Rozenson 1940–43 On Riemann spaces of class one, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **4** 181–192; **5** 325–351; **7** 253–284.

  [余次元 $=1$ の場合の研究. Rozenson の論文は露語です. Thomas は $n \geq 4$ のときある generic な条件のもとで, コダッチ方程式はガウス方程式の結果として自動的に成り立つことを示しています. この事実は Allendoerfer (1939) により余次元が高い場合に拡張されました.]

- C. B. Allendoerfer 1937 Einstein spaces of class one, Bull. Amer. Math. Soc. **43** 265–270.

  [クラス数が 1 となる Einstein 空間の特徴付けを与える. そのすぐ後で A. Fialkow は定曲率空間内の Einstein 超曲面の分類を与えています (Ann. of Math. **39** (1938) 762–785).]

- A. E. Liber 1938 On a class of Riemannian spaces of constant negative curvature (in Russian), Uchen. Zap. Saratov Gos. Univ. Ser. Fiz.-Mat. **1** (14) 105–122.

  [H^n は $\mathbf{R}^{2n-2}$ へ局所的に等長に埋め込めないことを証明. しかし文献を遡れば, E. Cartan, Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien, Bull. Soc. Math. France **47** (1919) 125–160; **48** (1920) 132–208 にこの事実は既に述べられているようです. これは重要な主張で, F. Schur の結果 (1886) と合わせると H^n の局所的なクラス数が確定したことになります. 現在では大槻富之助による証明 (1954) の方が有名でしょう. 負定曲率空間に限らず, n 次元負曲率空間は $\mathbf{R}^{2n-2}$ へ局所的に等長に埋め込めないことが証明されています. 小林昭七–野水克己の Foundation of Differential Geometry Vol.II (p.28) にある T. A. Springer のアイデアを使うと, 大槻の定理を簡単に証明することができます.]

- C. B. Allendoerfer 1939 Rigidity for spaces of class greater than one, Amer. J. Math. **61** 633–644.

  [剛性の研究. タイプ数を導入. ユークリッド空間内の余次元 $\leq \frac{1}{3}\dim M$ の generic な部分多様体は剛性をもつ. タイプ数が 4 以上なら, コダッチ方程式はガウス方程式から自動的に導かれる. 剛性に関する結果は Berger–Bryant–Griffiths (1983) により改良されたみたいです.]

- C. Tompkins 1939 Isometric embedding of flat manifolds in Euclidian space, Duke Math J. **5** 58–61.

  [コンパクトで平坦な n 次元リーマン多様体は $\mathbf{R}^{2n-1}$ へ等長にはめ込めないことを証明．後の Chern–Kuiper, 大槻富之助の仕事の原型となる結果です．標準的な平坦トーラス $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ は $\mathbf{R}^{2n}$ へ等長に埋め込めるので，この結果はある意味で best possible なものです．しかし数多く存在している他の平坦トーラスに関しては, 等長埋め込み可能な次元について何も知られていないのが現状のようです．(ただし 2 次元の場合, T^2 上の任意の計量について T^2 から $\mathbf{R}^3$ への大域的共形埋め込みが存在します．A. M. Garsia–E. Rodemich, Pacific J. Math. **11** (1961) 193–204.) Tompkins は更に平坦なクラインの壷は $\mathbf{R}^4$ へ等長はめ込み可能であることを示しました (Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 508)．クラインの壷は $S^4(\subset \mathbf{R}^5)$ へ埋め込めることがわかっていますので (Tang (2004) の項の論文を参照), $\mathbf{R}^4$ へ等長に埋め込めるか否かが未解決問題です.]

- R. Blum 1946 Ueber die Bedingungsgleichungen einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit, die in einer Euklidischen Mannigfaltigkeit eingebettet ist, Bull. Math. Soc. Roumaine Sci. **47** 144–201.

  [余次元 $\leq \frac{1}{8}n(n-2)$ の範囲においては, ガウス方程式を満たす第二基本形式は自動的にコダッチおよびリッチ方程式も満たす (ただしある種の generic さの仮定が必要)．余次元が 1 のときは Thomas (1936) が同様の結果を示しています．また Allendoerfer (1939) は余次元 $\leq \frac{1}{4}n$ で generic なとき, ガウス方程式からコダッチおよびリッチ方程式が導かれることを示しています. Blum の仕事はこれらの定理の拡張にあたるものです．リーマン多様体の等長埋め込みにおいて, ガウス・コダッチ・リッチの三つは基本的な方程式ですが, これらの方程式は互いに独立というわけではなく, その中でガウス方程式が最も重要な方程式であることをこの結果は示しています.]

- D. Blanuša 1947 Le plongement isométrique des espaces elliptiques dans des espaces Euclidiens, Glasnik Mat. Fiz. I Astr. **2** 248–249.

  [正の定曲率空間である実射影空間 $P^n(\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+3)}$ への大域的な等長埋め込みを構成．この埋め込みは，1968 年に小林昭七により一般の対称 R 空間に拡張されました．$P^n(\mathbf{R})$ の大域的な等長埋め込みについては, 未だにこれが知られているものの中で次元最小です. 実際これが最小次元であるかもしれません. $P^2(\mathbf{R})$ については Blanuša (1954), Gromov–Rokhin (1970), Guijarro (2001), Tang (2004) の項も見て下さい.]

- 松本誠 1950 Riemann spaces of class two and their algebraic characterization, J. Math. Soc. Japan **2** 67–76; 77–86; 87–92.

  [余次元 $=2$ の場合の研究．Finsler 幾何学の研究を開始される前の話です. クラス数については N. N. Yanenko による長大な研究もあります (Doklady Akad. Nauk. SSSR **83** (1952) 533–536; 667–669, Uspehi Mat. Nauk **8** (1953) 21–100, Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. **10** (1956) 139–191, すべて露語).]

- A. Borel 1950 Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, C.R. Acad. Sci. Paris Ser.A **230** 1378–1380.

[Cayley 射影平面と対称空間 $F_4/Spin(9)$ とを初めて同一視．カルタンによる対称空間の分類からかなり年月がたっています．Cayley 射影平面の自己同型群に関しては，他に C. Chevalley–R. D. Schafer (1950), H. Freudenthal (1951) 達の代数方面からの貢献があります.]

- 松本誠　1951　Conformally flat Riemann spaces of class one, J. Math. Soc. Japan **3** 306–309.

  [クラス数 = 1 となる共形平坦空間の特徴付けを与える．このような空間の研究はカルタンにより始められ (1918 頃), 分類に関しては R. N. Sen (1957 ∼ 1966), G. M. Lancaster (1969 ∼ 1973), 西川青季 (1974), 陶山芳彦 (2000 ∼ 2005) 達の研究があります.]

- S. S. Chern, N. H. Kuiper　1952　Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space, Ann. of Math. **56** 422–430.

  [index of nullity と index of relative nullity を導入．すべての点において index of nullity $\geq r$ となるコンパクト n 次元リーマン多様体は $\mathbf{R}^{n+r-1}$ へ等長にはめ込めない．また，コンパクト非正曲率 n 次元リーマン多様体は $\mathbf{R}^{2n-1}$ へ等長にはめ込めない (後に大槻富之助 (Proc. Japan Acad. **29** (1953) 99–100) が証明を完成させる).]

- L. Nirenberg　1953　The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large, Comm. Pure Appl. Math. **6** 337–394.

  [ガウス曲率が正のコンパクト向き付け可能な曲面は $\mathbf{R}^3$ 内の凸曲面として一意的に等長埋め込み可能．H. Weyl が 1916 年に提出した問題で，H. Lewy (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **24** (1938) 104–106)，A. D. Alexandroff (Mat. Sbornik **11** (1942) 15–65), A. V. Pogorelov (Dokl. Akad. Nauk SSSR **66** (1949) 1051–1053; **67** (1949) 791–794, 英訳は AMS Transl. Ser.I **6** (1962) 424–429), E. Heinz (J. Math. Mech. **11** (1962) 421–454) 達による貢献があります．N. V. Efimov, Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces, AMS Transl. Ser.I **6** (1962) 274–423, R. S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982) 65–222, P. Guan–Y. Li, The Weyl problem with nonnegative Gauss curvature, J. Diff. Geom. **39** (1994) 331–342 を参照して下さい．この定理の中の ‘一意的’ の部分がコーン–フォッセンの定理です．この定理の非コンパクト版もあります: $\mathbf{R}^2$ 上の正曲率をもつ完備な計量は常に $\mathbf{R}^3$ に等長埋め込み可能 (Olovjanisnikov–Pogorelov. cf. J. Hong, Geometry from the Pacific Rim (1997) 173–182). S^2 上 $K \geq 0$ となる計量の場合については, 上記 Guan–Li, J. Hong の論文, 及び J. A. Iaia, (Duke Math. J. **67** (1992) 423–459), J. Hong–C. Zuily (Math. Z. **219** (1995) 323–334) を見て下さい.]

- 立花俊一　1953　On the imbedding problem of spaces of constant curvature in one another, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **4** 44–50.

  [この論文では, 曲率の符号が通常のものとは逆なので注意が必要です．定曲率空間の間の等長埋め込みの研究はカルタン (1919) に始まり，多くの結果があります.]

- 大槻富之助　1954　Isometric imbedding of Riemann manifolds in a Riemann manifold, J. Math. Soc. Japan **6** 221–234.

  [n 次元負曲率空間は $\mathbf{R}^{2n-2}$ へ等長に埋め込めない．証明法については Liber (1938) の項を参照して下さい．この定理は H^n の局所等長埋め込みに対しては決定的な結果を与えてくれ

ていますが, $P^n(\mathbf{C})$ の非コンパクト双対空間等他の非コンパクト型対称空間についてはどうなのでしょうか. H^n 以外の非コンパクト型対称空間のクラス数について正面切って論じた論文を私は一つも知りません. Chern–Kuiper, 大槻の結果に関しては, ここに紹介しきれないほど多種多様な variation が生み出されています.]

- D. Blanuša 1954 Le plan elliptique plongé isométriquement dans un espace à quatre dimensions ayant une courbure constante, Glasnik Mat. Fiz. I Astr. **9** 41–58.

[実射影平面 $P^2(\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}^4$ への大域的な "C^1-級" 等長はめ込みを具体的に構成. $K = 1/r^2$ の場合, それは次式で与えられます：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{r}{2}\sin^2 u \, \sin\left(2v - 2\sqrt{3}\cos u - 2\sqrt{3}\log\left|\tan\frac{u}{2}\right|\right), \\
x_2 &= \frac{r}{2}\sin^2 u \, \cos\left(2v - 2\sqrt{3}\cos u - 2\sqrt{3}\log\left|\tan\frac{u}{2}\right|\right), \\
x_3 &= \frac{r}{2}\sin 2u \, \sin\left(v - \sqrt{3}\cos u\right), \quad x_4 = \frac{r}{2}\sin 2u \, \cos\left(v - \sqrt{3}\cos u\right).
\end{aligned}
$$

ただし $-\pi/2 \le u$, $v \le \pi/2$ で u は北極からの緯度, v は経度を表します. この写像が C^1-級か C^2-級かの判定は, 幾何学のよい演習問題でしょう. $P^2(\mathbf{R})$ は C^∞-級なら既に言及したとおり $\mathbf{R}^5$ に等長埋め込み可能であることがわかっています.]

- J. Nash 1954 C^1 isometric imbeddings, Ann. of Math. **60** 383–396.

N. H. Kuiper 1955 On C^1-isometric imbeddings I, II, Indag. Math. **17** 545–556; 683–689.

[C^1-級等長埋め込みの研究. 後年の S. Smale–M. W. Hirsch の研究成果と合わせると, n 次元 C^1-級多様体 M 上の C^0-級リーマン計量について

(1) M は局所的に $\mathbf{R}^{n+1}$ へ等長埋め込み可能,

(2) M は大域的に $\mathbf{R}^{2n}$ へ等長埋め込み可能,

(3) M は大域的に $\mathbf{R}^{2n-1}$ へ等長はめ込み可能

を示したことになります. これらは '接続・曲率' という概念のない世界での話です.]

- D. Blanuša 1955 Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume, Monatsh Math. **59** 217–229.

[大域的な C^∞-級等長埋め込み $H^2 \longrightarrow \mathbf{R}^6$, $H^n \longrightarrow \mathbf{R}^{6n-5}$ を構成 (解析的ではありません). H^n 全体を有限次元ユークリッド空間に実現した最初の例です. クロアチア (旧ユーゴスラビア) の数学者 Danilo Blanuša (1903–1987) はこの他にも実に様々な等長埋め込み・はめ込みを構成しています. 例えば無限に延びた平坦なメビウスの帯から $\mathbf{R}^4$, S^4, H^4 への等長はめ込み等. 詳しくは [5] の p.1413 を参照して下さい.

　ちなみに幅の狭いメビウスの帯なら $\mathbf{R}^3$ に等長に埋め込めます. これは実際に紙でモデルが作れるので直感的には明らかでしょう. どの程度の幅までの帯なら $\mathbf{R}^3$ へ等長に埋め込み・はめ込み可能かについての研究もあります (B. Halpern–C. Weaver, Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1977) 41–70). 完備なメビウスの帯は $\mathbf{R}^3$ には等長にはめ込めません. メビウスの帯については I. K. Sabitov, Isometric immersions and embeddings of a flat Möbius strip in Euclidean spaces, Izv. Math. **71** (2007) 1049–1078, 及びそこに引用されている文献を参照して下さい.

Blanuša は四色定理に関わるグラフ理論の研究 (snark を発見, これは切手のデザインにも使われている), 物理 (相対論)・工学関係の仕事もしているそうです. 岩波数学辞典の初版 (1954) には Blanuša の仕事が紹介されていました.]

- J. Nash　1956　The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math. **63** 20–63.

  [Nash の埋め込み定理. コンパクト C^r-級 $(3 \leq r \leq \infty)$ リーマン多様体は $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(3n+11)}$ へ C^r-級に等長埋め込み可能. 非コンパクトの場合は $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)}$ への埋め込みが存在する. ここで $r = 2$ は除外されていることに注意.

  The Essential John Nash (eds. H. W. Kuhn and S. Nasar, Princeton Univ. Press, 2002, 邦訳もあり) p.209 の Author's Note に

  In June 1998 I was notified by an e-mail from Professor R. M. Solovay of a fault in the arguments of the last part (part D) of my paper $\cdots\cdots$ It seems, surprisingly, that before then no reader had actually detected the error! With regard to the question of repair or repairs of the error, I feel that the whole issue of what to do for non-compact manifolds has been changed by the contributions of Mikhail Gromov.

  とあります. その後 ambient space $\mathbf{R}^N$ の次元の評価は R. E. Greene (1970), C. J. S. Clarke (Proc. Royal Soc. London A **314** (1970) 417–428), M. L. Gromov–V. A. Rokhlin (1970), M. Günther (1991) 達により (不定値計量の場合も含め) 大幅に改良されました.]

- 小林昭七　1956　Holonomy groups of hypersurfaces, Nagoya Math. J. **10** 9–14.

  [$\mathbf{R}^{n+1}$ のコンパクト超曲面の制限ホロノミー群は $SO(n)$ になる. 余次元 $= 2$ の場合への拡張が R. L. Bishop (J. Diff. Geom. **2** (1968) 347–353) にあります.]

- A. Lichnérowicz　1958　Géométrie des Groupes de Transformations, Dunod, Paris.

  [コンパクトなエルミート対称空間 $M = G/K$ から $\mathfrak{g}$ $(= G$ のリー環) への大域的等長埋め込みを構成. 小林の埋め込み (1968) はこれを対称 R 空間に拡張したものにあたります.]

- E. R. Rozendorn　1960　Realization of the metric $ds^2 = du^2 + f^2(u)dv^2$ in five dimensional Euclidean space, Dokl. Akad. Nauk Armjan SSR **30** No.4 197–199.

  [H^2 から $\mathbf{R}^5$ への大域的な C^∞-級等長はめ込みを構成. 露語. ヒルベルトの結果 (1901) とあわせると, 'H^2 は大域的に $\mathbf{R}^4$ へ等長はめ込み可能かどうか' が今でもなお未解決の問題です. 埋め込みについては $\mathbf{R}^6$ に可能であるということしかわかっていません (Blanuša (1955)). H^n の等長埋め込み問題に関しては, ロシアの人達の膨大な研究があります (Y. A. Aminov, N. V. Efimov, Y. G. Lumiste, E. G. Poznyak, E. R. Rozendorn, I. K. Sabitov, E. V. Shikin 達). 例えば Y. A. Aminov, Embedding problems: Geometric and topological aspects, J. Soviet Math. **25** (1984) 1308–1331 を参照して下さい. 彼らの仕事を見るにつけ, ロバチェフスキー以来の伝統でしょうか, ロシアの人達には H^n に対する特別な思い入れがあるとしか言いようがありません.]

- 高橋恒郎　1966　Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **18** 380–385.

[M から球面への極小な等長はめ込みと M のラプラシアンの固有関数との関係．この結果により等質空間 G/K から球面 (従ってユークリッド空間) への大域的な等長はめ込みが多く構成されます．N. R. Wallach, Minimal immersions of symmetric spaces into spheres, In: Symmetric Spaces (eds. W. M. Boothby, G. L. Weiss), Pure Appl. Math. **8**, Marcel Dekker (1972) 1–40 も参照して下さい．小林の埋め込みは，このようにして得られる対称 R 空間の埋め込みの中で最も次元の低いもの，ということもできます.]

- 小林昭七　1968　Isometric imbeddings of compact symmetric spaces, Tôhoku Math. J. **20** 21–25.

[対称 R 空間からユークリッド空間への大域的な等長埋め込みを構成．これは群論的にみて様々な美しい性質を持った埋め込みです．これにより，多くの対称 R 空間はおおよそ $2 \times \dim M$ 次元のユークリッド空間へ等長に埋め込めることになります．カルタンの次元 ‘$\frac{1}{2}n(n+1)$’ と比べ，対称 R 空間は極度に低い次元に実現されていることがわかります．特に

$$S^n = SO(n+1)/SO(n), \quad Sp(n)/U(n), \quad P^2(\mathbf{H}) = Sp(3)/Sp(2) \times Sp(1),$$
$$P^2(\mathbf{Cay}) = F_4/Spin(9), \quad Sp(n)$$

については局所的にみても小林の標準埋め込みが最小次元の等長埋め込みを与えており，更にこの中で S^2 以外の空間については強い意味での局所的な剛性が成り立ちます (阿賀岡–兼田)．残りの対称 R 空間についても，小林の埋め込みが ‘ほぼ’ 最小次元の局所等長埋め込みを与えているであろう，というのが現在の私達の感触です．

コンパクト単純リー群の中で対称 R 空間となるのは古典型のものだけです．コンパクト例外群についても球表現を利用して等長埋め込みを構成することはできますが，古典群の場合に比べいずれも異様に高い次元への埋め込みとなります．例えば 248 次元の E_8 については カルタンの次元 ($= \frac{1}{2}n(n+1) = 30876$) より低い次元の埋め込みはこの方法では構成できません．$SO(n) \subset \mathbf{R}^{n^2}$ 等と比べてみるに，何らかの仕組みが働いて対称 R 空間とそうでない空間との違いが生じているのでしょうが，それが何であるのか私にはわかりません．

球表現については次の文献を見て下さい：R. Goodman–N. R. Wallach, Representations and Invariants of the Classical Groups, Encyclopedia Math. Appl. **68** (1998) Cambridge Univ. Press, S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Math. Surveys Monographs **83** (2000) Amer. Math. Soc., 杉浦光夫, Representations of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces, Proc. Japan Acad. **38** (1962) 111–113, L. Vretare, Elementary spherical functions on symmetric spaces, Math. Scand. **39** (1976) 343–358, G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I, (1972) Springer.]

- R. E. Greene　1970　Isometric embeddings of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. **97**.

[擬リーマン多様体から不定値計量を持ったユークリッド空間への C^∞-級等長埋め込み論を展開.]

- M. L. Gromov, V. A. Rokhlin　1970　Embeddings and immersions in Riemannian geometry, Russian Math. Surveys **25** No.5 1–57.

[この時点での等長埋め込み論を総括した大論文．Nash の埋め込み次元を (非コンパクトの場合も含め) $\frac{1}{2}(n+2)(n+5)$ まで下げています．これ以外にも実に様々な結果が記されています．その中からいくつかピックアップしますと，

・ n 次元 C^∞-級リーマン多様体は局所的に $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)+n}$ へ C^∞-級等長埋め込み可能．(上記 Greene の論文 (1970) では, 擬リーマン多様体の場合に同じ結果を独立に示しています．)

・ n 次元リーマン多様体上の C^∞-級リーマン計量で局所的に $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)-1}$ へ等長に埋め込めるもの全体は C^∞-級リーマン計量全体の成す空間の中で nowhere dense な集合となる．(話を簡単にするためここでは C^∞-級としましたが，正確な主張と証明はこの論文の Appendix 1 を見て下さい．また H. Jacobowitz (Contemp. Math. **332** (2003) 131–137) も参照して下さい.) この結果，低次元のユークリッド空間に埋め込めるリーマン多様体は何らかの意味で特殊なリーマン多様体と言うことができます．しかしどのような意味で‘特殊’なのか，それはおそらく曲率を使って表現されるはずの条件ですが，残念ながらそれを具体的に記述するための微分幾何学的な言葉を私達はまだ掌握していません．p.8 にも Without doubt, theorems on the local isometric non-embeddability of specific n-dimensional manifolds in $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)-1}$ would be of great interest. Unfortunately, for $n > 2$ such results are not known; and the existing results concern instead of $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)-1}$ euclidean spaces of comparatively low dimension. とあります.

・ 任意の n 次元実解析的なリーマン多様体は (非コンパクトの場合も含め) $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}(n+2)(n+5)}$ へ実解析的に大域等長埋め込み可能.

・ $P^2(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^3$ へ等長はめ込み不可能．また n が 2 のべき乗のとき，$P^n(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{2n}$ へ等長埋め込み不可能．従って Blanuša (1947) の結果と合わせて，$P^2(\mathbf{R})$ の大域等長埋め込み可能な最小次元は 5 であることが確定したことになります．(Borisenko [1] p.455 も参照して下さい.) しかしはめ込みについては $\mathbf{R}^4$ に C^∞-級等長はめ込み可能か否かが未解決問題です.

・ コンパクト 2 次元リーマン多様体は $\mathbf{R}^{10}$ へ大域的に C^∞-級等長埋め込み可能．特に S^2 の場合，S^2 上の任意のリーマン計量に対して $\mathbf{R}^7$ への大域的等長埋め込みが存在．実解析的の場合にも同じ結果が成立する．7 次元というのは S^2 に対する最良の評価なのでしょうか? (R. E. Greene は $\mathbf{R}^3$ に等長埋め込み不可能な計量を S^2 上に構成しています (J. Diff. Geom. **5** (1971) 353–356).)

また初めにも記しましたように，歴史的な事柄についても詳しい記述があります.]

- A. Weinstein　1970　Positively curved n-manifolds in $\mathbf{R}^{n+2}$, J. Diff. Geom. **4** 1–4.

  [余次元 2 の正曲率空間の研究. コンパクトで偶数次元ならオイラー数は正. コンパクト向き付け可能ならポントリャーギン類, スティエフェル・ホイットニー類はすべて消滅する.]

- R. E. Greene, H. Jacobowitz　1971　Analytic isometric embeddings, Ann. of Math. **93** 189–204.

  [n 次元コンパクト実解析的なリーマン多様体は $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(3n+11)}$ へ実解析的に大域等長埋め込み可能.]

- H. Jacobowitz　1971　Local isometric embeddings of surfaces into Euclidean four space, Indiana Univ. Math. J. **21** 249–254.

  E. G. Poznyak　1973　Isometric immersions of two-dimensional Riemannian metrics in Euclidean space, Russian Math. Surveys **28** 47–77.

  [任意の 2 次元リーマン多様体は局所的に $\mathbf{R}^4$ に等長埋め込み可能. $\mathbf{R}^3$ への等長埋め込みについては Lin (1985) の項を見て下さい.]

- 田中昇　1973　Rigidity for elliptic isometric imbeddings, Nagoya Math. J. **51** 137–160.

  [コンパクト連結なリーマン多様体の非退化楕円型等長埋め込みの剛性定理：等長埋め込み f が無限小的な剛性をもてば, 同じユークリッド空間への等長埋め込み f' でその 3 階までの微分が f のそれに十分近いものはすべて f と合同. この剛性定理はコンパクトエルミート対称空間の標準埋め込みに適用できます. 標準埋め込みのそばには, 本質的に標準埋め込みしか存在しないということです. 局所的な剛性定理については兼田–田中 (1978) の項を見て下さい.]

- S. S. Chern, J. Simons　1974　Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math. **99** 48–69.

  [コンパクトで向き付け可能な 3 次元リーマン多様体を $\mathbf{R}^4$ へ共形的にはめ込む際の 2 次障害類を構成. 例えば $P^3(\mathbf{R})$ は大域的に $\mathbf{R}^4$ へ共形はめ込み不可能. この不変量は J. L. Heitsch–H. B. Lawson,Jr, H. Donnelly, J. J. Millson, 坪井堅二達により対称空間・レンズ空間等様々な空間について計算され, 種々の大域的共形はめ込み不可能定理が得られています. Chern–Simons 不変量自身については, 最近では別の文脈で語られることが多くなりました. 個人的には思い出深い論文です.]

- J. Gasqui　1975　Sur l'existence d'immersions isométriques locales pour les variétés riemanniennes, J. Diff. Geom. **10** 61–84.

  [Janet–Cartan の埋め込み定理を H. Goldschmidt 流偏微分方程式論の formulation の下で再証明. 兼田英二–田中昇 (1978) の Appendix にも別証明が与えられています.]

- H. Goenner　1975　Local isometric embedding of Riemannian manifolds with groups of motion, General Relativity and Gravitation **6** 75–78.

  [(相対論の立場から) 等長変換群の次元が大きな 4 次元ローレンツ多様体は, 低次元ユークリッド空間へ等長に埋め込めることが述べられています. 空間の対称性とクラス数には関連があるということです.]

- J. D. Moore　1976　Equivariant embeddings of Riemannian homogeneous spaces, Indiana Univ. Math. J. **25** 271–279.

  [コンパクト等質リーマン多様体は, あるユークリッド空間へ同変等長に埋め込める. 一方, 任意の n に対して $SO(3)$ 上の左不変計量で $\mathbf{R}^n$ への同変等長埋め込みの存在しないものが存在する, とのコメントが記されており, 同変に埋め込むためには一般に高い次元が必要なようです. J. D. Moore–R. Schlafly (On equivariant isometric embeddings, Math. Z. **173** (1980) 119–133) に拡張された結果が述べられています.]

- J. D. Moore　1977　Submanifolds of constant positive curvature I, Duke Math. J. **44** 449–484.

  [Chern–Simons 不変量を使って $P^3(\mathbf{R})$ は大域的に $\mathbf{R}^5$ へ等長に埋め込めないことを証明. Moore にはこの他にも等長埋め込み問題への様々な貢献があります.]

- J. Vilms　1977　Local isometric imbedding of Riemannian n-manifolds into Euclidean $(n+1)$-space, J. Diff. Geom. **12** 197–202.

[n 次元リーマン多様体 ($n \geq 5$) が $\mathbf{R}^{n+1}$ へ局所等長的に埋め込めるための必要十分条件を曲率作用素が非退化という仮定の下で求めている.]

- 兼田英二, 田中昇　1978　Rigidity for isometric imbeddings, J. Math. Kyoto Univ. **18** 1–70.

  [田中の剛性定理 (1973) の '局所版'：連結なリーマン多様体において, 等長埋め込み f が非退化かつ完全有限型ならば, 同じユークリッド空間への等長埋め込み f' でその 2 階までの微分が f のそれに十分近いものはすべて f と合同．この局所的剛性定理も多くの対称 R 空間 G/K の標準埋め込みに適用できますが，G/K の群論的な性質により埋め込みの型に種々の違いが生じます. 詳しくは兼田英二, Global rigidity of compact classical Lie groups, Hokkaido Math. J. **14** (1985) 365–397, Types of the canonical isometric imbeddings of symmetric R-spaces, 同 **22** (1993) 35–61 を見て下さい. 不思議なことに, コンパクトエルミート対称空間の中で $P^n(\mathbf{C})$ だけが完全有限型になりません. 擬平坦数の決定についても同様ですが, 対称空間だからといって一律に事の運ばないのが面白くて難しいところです.]

- C. C. Fwu　1979　Kaehler manifolds isometrically immersed in Euclidean space, J. Diff. Geom. **14** 99–103.

  [実 $2n$ 次元コンパクトケーラー多様体は $\mathbf{R}^{3n-1}$ へ等長にはめ込むことはできない. T. Hasanis による完備ケーラー多様体への拡張結果もあります (Arch. Math. **38** (1982) 470–472).]

- S. B. Kadomcev　1979　The impossibility of some special isometric immersions of Lobačevskiĭ spaces, Math. USSR Sbornik **35** 461–480.

  [H^n から $\mathbf{R}^N$ への等長はめ込みで, 点ごとの回転対称性をもつものは存在しない. 一方, H^2 から $\mathbf{R}^4$ への局所等長はめ込みで, 点ごとの回転対称性をもつものが存在する. しかし $\mathbf{R}^4$ を $\mathbf{R}^3$ に置き換えると, 局所的にすら存在しなくなる.]

- J. Vargas　1981　A symmetric space of noncompact type has no equivariant isometric immersions into the Euclidean space, Proc. Amer. Math. Soc. **81** 149–150.

  [タイトル通りの論文．非コンパクト型対称空間 $M = G/K$ はユークリッド空間への G-同変等長はめ込みをもたない. Bieberbach (1932) の結果を一般の非コンパクト型対称空間へ拡張したものといえます.

  Vargas の結果は B. Csikós (A comparison theorem for equivariant isometric immersions, Period. Math. Hungarica **36** (1998) 97–103) により更に次の形に拡張されています: M, N を非正曲率完備リーマン多様体とする. 連結リー群 G が M, N に等長・非自明に作用し, M から N への G-同変等長はめ込みが存在するなら, $\sup K_M \geq \inf K_N$ が成り立つ. また, D. V. Alekseevsky–A. J. Di Scala (AMS Transl. Ser.2 **210** (2003) 11–25) によるやや弱い拡張もあります：単連結な非正曲率リーマン等質空間 $M = G/K$ がユークリッド空間への G-同変等長はめ込みをもてば M は平坦.

  私の知る限り，非コンパクト型対称空間の中でユークリッド空間への具体的な等長埋め込みが得られているのは負定曲率空間 H^n だけのようです. 上記の結果は, 群論的手法では非コンパクト型対称空間の等長埋め込みは構成できないことを意味しており, ある意味深刻な状況です. 一般の非コンパクト型対称空間に対して，何らかの対称性をもった等長埋め込みの実例が (局所的でよいから) 作れないものでしょうか. H^N への埋め込みでもかまいません. H^N は局所的に $\mathbf{R}^{2N-1}$ へ等長に埋め込めますから.]

- 江尻典雄　1981　Totally real submanifolds in a 6-sphere, Proc. Amer. Math. Soc. **83** 759–763.

  [$P^3(\mathbf{R})$ は大域的に $\mathbf{R}^7$ へ等長にはめ込める．実際には 6 次の調和多項式を使った $S^3(1/16)$ から $S^6(1)$ への全実極小等長はめ込みの存在を示しています．間下克哉 (Tsukuba J. Math. **9** (1985) 185–202) はこのはめ込みの群論的な意味付けを明確にし，また F. Dillen–L. Verstraelen –L. Vrancken (J. Math. Soc. Japan **42** (1990) 565–584) はこの 6 次式を具体的に書き下しました. Blanuša, 小林により $P^3(\mathbf{R})$ は大域的に $\mathbf{R}^9$ へ等長に埋め込めることがわかっていますが，Moore の結果 (1977) と合わせても，大域的な等長埋め込み, あるいははめ込みが可能となるユークリッド空間の最小次元は $P^3(\mathbf{R})$ についてはまだ確定していません.]

- W. Henke　1981　Isometrische Immersionen des n-dim. Hyperblolischen Räumes H^n in E^{4n-3}, Manuscripta Math. **34** 265–278.

  [H^n から $\mathbf{R}^{4n-3}$ への大域的な C^∞-級等長はめ込みを構成 (埋め込みでなく, はめ込みです)．これが現在知られている H^n の最小次元の大域的等長はめこみです．有名な未解決問題として，'H^n $(n \geq 3)$ から $\mathbf{R}^{2n-1}$ への大域的等長はめ込みは存在しないことを示せ' というものがあります．この問題に関しては Y. A. Aminov, J. D. Moore, F. Xavier, その他の人達の様々な貢献があります．Y. A. Nikolayevsky, Non-immersion theorem for a class of hyperbolic manifolds, Diff. Geom. its Appl. **9** (1998) 239–242 には，非単連結完備な n 次元負定曲率空間は $\mathbf{R}^{2n-1}$ へ等長にはめ込めないことが示されています．上記の予想が仮に正しいとすると, でははめ込み可能な最小次元はいくつか, という問題が次に自然に考えられます．しかし $2n$ と $4n-3$ とでは次元の差はまだ大きいと言わざるをえません (Rozendorn (1960) の項に記したように H^2 のはめ込みですら未解決です).

  　Rozendorn の構成も, Henke の構成も, 基本的には Blanuša の手法を踏襲しています. 回転面としての双曲空間の局所的実現に "ちょっと" 手を加えて大域的なはめ込みを構成しています．回転性にこだわらなければ, 実はもう少しだけ低い次元に実現可能なのではないでしょうか.]

- E. J. Berger　1981　The Gauss map and isometric embedding, Ph. D. Thesis, Harvard Univ.

  [n 次元リーマン多様体のガウス方程式は余次元が $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ 以上であれば必ず解をもつ．つまりガウス方程式は ' カルタンの次元'$-n = \frac{1}{2}n(n-1)$ より小さな余次元で解けてしまうということです．逆の見方をすれば, generic なリーマン多様体をユークリッド空間に等長に埋め込むためには $\frac{1}{2}n(n-1)$ 以上の余次元が必要でしたから，ガウス方程式の可解性以外にも局所等長埋め込みの obstruction が存在することを意味しています．おそらくそれは曲率の (高階) 共変微分に関する条件となるはずです．ガウス方程式の可解性を調べることが既に十分困難な問題ですから, これは深刻な事態といえます．なお，Berger の示したガウス方程式が解をもつ余次元の評価式は最良のものではないことに注意しておきます．例えば $n = 2, 3$ のとき解をもつ最小の余次元はそれぞれ 1, 2 となります．一般の n の場合の最小余次元はどのような式で表されるのでしょうか. これは幾何の問題というよりは純粋に代数の問題ですが, このようなこともまだわかっていません. 大変興味深い問題です. Jacobowitz の論文 Curvature operators on the exterior algebra, Linear Multilinear Algebra **7** (1979) 93–105 にも明確にこの問題が提起されています.]

- H. Jacobowitz　1982　Local isometric embeddings, Ann. of Math. Studies **102** 381–393.

  [2 次元 C^∞-級リーマン多様体において，一点 p におけるガウス曲率が 0 でなければ点 p の十分小さな開近傍は $\mathbf{R}^3$ へ C^∞-級等長に埋め込める．一般に C^∞-級のカテゴリーにおいて，n 次元多様体上の generic なリーマン計量は $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ へ局所等長埋め込み可能か，という偏微分方程式の問題があります．上記の結果は $n = 2$ のとき答は yes であることを示していますが，誰が最初にこれを示したのか確認できませんでした．Gromov–Rokhlin (1970) の p.7 には $K > 0$ のときは Bianchi が，$K < 0$ のときは Pogorelov が示した，と記されていますが.]

- E. Berger, R. Bryant, P. Griffiths　1983　The Gauss equations and rigidity of isometric embeddings, Duke Math. J. **50** 803–892.

  [$\dim M \geq 8$ のとき，ユークリッド空間内の余次元 $\leq \dim M$ の generic なリーマン部分多様体 M は剛性をもつ．またかなり高い余次元のところまで，generic な等長埋め込みの変形は有限個のパラメータのみに依存するという主張が示されているようです．ただしここでいう generic とは，第二基本形式及び曲率の高階 jet がある代数多様体に含まれないという形で定義されるもので，与えられた埋め込みが generic であるか否かを具体的に判定できるような代物ではなさそうです.]

- R. L. Bryant, P. A. Griffiths, D. Yang　1983　Characteristics and existence of isometric embeddings, Duke Math. J. **50** 893–994.

  [generic な 3 次元 C^∞-級リーマン多様体は $\mathbf{R}^6$ へ C^∞-級に局所等長埋め込み可能．$\mathbf{R}^6$ の 6 は今の場合丁度カルタンの次元 $\frac{1}{2}n(n+1)$ に一致します．またここでいう generic とは Ricci テンソルを用いて記述できる条件です.]

- C. S. Lin　1985　The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature, J. Diff. Geom. **21** 213–230.

  [ガウス曲率が非負の 2 次元リーマン多様体は局所的に $\mathbf{R}^3$ へ等長に埋め込める．微分可能性の程度については原論文を参照して下さい．Lin はこの他にも同様の埋め込み定理を得ています (Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 867–887): 一点において $K = 0, \nabla K \neq 0$ ならばその点の開近傍は $\mathbf{R}^3$ へ等長に埋め込める．中村玄 (Tokyo J. Math. **10** (1987) 241–257) は更に $K = \nabla K = 0, \operatorname{Hess} K < 0$ のときでも同じ結果の得られることを示しました．Q. Han–J. X. Hong–C. S. Lin (J. Diff. Geom. **63** (2003) 475–520), Q. Han (Calculus of Variations **25** (2005) 79–103), M. A. Khuri (J. Diff. Geom. **76** (2007) 249–291) 等の結果もあります．J. Hong の解説 (Some new developments of realization of surfaces into $\mathbf{R}^3$, Proc. ICM (2002) Vol.3 155–165) も参照して下さい．一方，局所的にすら $\mathbf{R}^3$ に等長に埋め込めない 2 次元リーマン多様体を構成したというプレプリントがあります (N. Nadirashvili–Y. Yuan, arXiv:math.DG/0208127)．この論文はまだ出版されていないようです．Pogorelov (Soviet Math. Dokl. **12** (1971) 729–730) は $\mathbf{R}^3$ に C^2-級実現不可能な $C^{2,1}$-級計量を構成しています.]

- 阿賀岡芳夫　1985　On the curvature of Riemannian submanifolds of codimension 2, Hokkaido Math. J. **14** 107–135.

[4 次元リーマン多様体 M が $\mathbf{R}^6$ へ等長にはめ込めるなら, M の曲率 $R : \wedge^2 T_x M \longrightarrow \wedge^2 T_x M$ は $\mathrm{Tr}\,(R \circ *)^3 = \mathrm{Tr}\,(R \circ *)^5 = 0$ という関係式をすべての点 $x \in M$ で満たす. ここに $*$ はホッジの $*$ 作用素 (この関係式は $T_x M$ の向き付けのとり方によらない). この関係式は, 線形写像 $R \circ *$ の 6 個の固有値が $\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$ の形になることと同値です. 線形写像の固有値を計算するだけで, 例えば $P^2(\mathbf{C})$ は局所的にすら $\mathbf{R}^6$ へ等長に埋め込めないことが示されます. 局所等長埋め込みの obstruction が曲率の不変式の形で具体的に得られる稀有な一例です. Rivertz (1999) の項も参照して下さい.]

- M. L. Gromov　1986　Partial Differential Relations, Springer.

  [大域的な等長埋め込みの次元の評価を改良. 現在知られている最良の評価は, M. Günther, Isometric embeddings of Riemannian manifolds, Proc. Intern. Congr. Math. Kyoto Vol.II, Math. Soc. Japan (1991) 1137–1143 にある結果のようです：n (≥ 5) 次元 C^∞-級リーマン多様体は $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+5)}$ へ大域的に C^∞-級等長埋め込み可能. 局所的に等長埋め込み可能な次元との差が n の linear order となるところまで評価が改良されました. Günther の得た次元は一般論としては最良の値といってよいのでしょうか. D. Yang による Günther の仕事の簡単な解説が arXiv:math.DG/9807169 にあります.

  この本の p.277 には双曲空間 H^n から $\mathbf{R}^{8n-8}$ への proper な解析的大域等長埋め込みを構成せよ, という練習問題 (!) が記されています. 私はフォローしきれていません. その直前にある Blanuša の仕事の引用 (proper 性) について, 下記 Henke-Nettekoven の p.20 に, それは勇み足である (Blanuša はそこまでは示していなかった) との指摘があります.]

- W. Henke, W. Nettekoven　1987　The hyperbolic n-space as a graph in Euclidean $(6n-6)$-space, Manuscripta Math. **59** 13–20.

  [像がグラフの形になる大域的な C^∞-級等長埋め込み $H^n \longrightarrow \mathbf{R}^{6n-6}$ を構成 ($n = 2$ のときの Blanuša の構成の一般化). $n \geq 3$ のときは, Blanuša (1955) の埋め込み次元を 1 次元改良しています. これが現在知られている H^n の最小次元の大域的等長埋め込みです. Henke が "埋め込み" というときは, 単に 1 対 1 はめ込みのことをさすのではなく, 像に相対位相を入れたとき, 像と M は同相になるという条件がついていますので用語については注意が必要です. H^n の等長埋め込み・はめ込みについては本論最後のページの表をご覧下さい.]

- 中村玄, 前田吉昭　1989　Local smooth isometric embeddings of low dimensional Riemannian manifolds into Euclidean spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **313** 1–51.

  [3 次元 C^∞-級リーマン多様体において一点 p における曲率が 0 でなければ p の開近傍は $\mathbf{R}^6$ へ C^∞-級に局所等長埋め込み可能. R. L. Bryant–P. A. Griffiths–D. Yang (1983) の仮定を弱めた形の埋め込み定理といえます. このような結果の高次元化は難しいということだそうですが $\cdots$.]

- 兼田英二　1990　On the Gauss–Codazzi equations, Hokkaido Math. J. **19** 189–213.

  [$P^2(\mathbf{C})$ から $\mathbf{R}^7$ への局所等長埋め込みに関して: 余次元 3 におけるガウス方程式の解集合は 10 次元の代数的集合になる. 更にその中のある generic な部分集合については, 実際の等長埋め込みの第二基本形式には決してなり得ない. この事実は, コダッチ方程式にあたる高階の条件を調べることにより導かれます. $P^2(\mathbf{C})$ は大域的に $\mathbf{R}^8$ へ等長埋め込み可能なのでクラス数は 3 か 4 のいずれかですが, もし 3 になるならば, $\mathbf{R}^7$ への局所等長埋め込みの第

二基本形式は singular なものをつなぎ合わせたものから成ることになります. 余次元 3 におけるガウス方程式の解がすべて求められれば, $P^2(\mathbf{C})$ のクラス数は決定可能と思われます.]

- H. J. Rivertz 1999 On isometric and Conformal Immersions into Riemannian Manifolds, Ph. D. Thesis, Univ. Oslo.

  [$M^3 \subset \mathbf{R}^4$, $M^5 \subset \mathbf{R}^7$ の場合について，曲率及びその共変微分の満たすべき恒等式を計算機を用いて具体的に求めた．与えられた M^n に対して $\mathbf{R}^{n+r}$ への局所等長埋め込みの存在・非存在を示すには，同様の関係式あるいは不等式を次元・余次元の高い場合にも求める必要があります．しかし，これは多変数版の‘終結式’を具体的に求めよ，という古典的不変式論において難問とされた問題にあたり，現実には (計算機を用いたとしても) ほぼ実行不可能であるように思われます．全く別の方向からのアプローチ法はないものでしょうか．一見出鱈目に出現しているかのように見える不変式の系列にも実はある構造が隠されていて，それが等長埋め込み問題にも反映されているはずだと，と私は確信しています.]

- L. Guijarro 2001 Isometric immersions without positive Ricci curvature, Contemp. Math. **288** 339–342.

  [$M^4 = P^2(\mathbf{C})\# \cdots \# P^2(\mathbf{C})$ (複素射影平面の連結和) から $\mathbf{R}^7$ へのはめ込みが, M^4 上に正のリッチ曲率をもつ計量を誘導することはない. 特に対称空間 $P^2(\mathbf{C})$ から $\mathbf{R}^7$ への大域的等長はめ込みは存在しない. また n が 2 のべき乗のとき, $P^n(\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}^{2n-1}$ へのはめ込みが $P^n(\mathbf{R})$ 上に正曲率をもつ計量を誘導することはない. $P^2(\mathbf{C})$ に関しては, $\mathbf{R}^7$ への局所等長埋め込みが存在するか否かだけが残された問題となります.]

- J. D. Moore 2002 Euler characters and submanifolds of constant positive curvature, Trans. Amer. Math. Soc. **354** 3815–3834.

  [$\mathbf{R}^{2n-1}$ へ等長はめ込み可能な n 次元コンパクト連結正定曲率空間は球面に限る. 特に $P^n(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{2n-1}$ へ等長にはめ込めない.]

- Z. Tang 2004 Some existence and nonexistence results of isometric immersions of Riemannian manifolds, Comm. Contemp. Math. **6** 867–879.

  [n が 2 のべき乗のとき, 正のスカラー曲率をもつ $P^n(\mathbf{R})$ 上の計量は $\mathbf{R}^{2n-1}$ へ等長はめ込み不可能. 上記 Guijarro (2001), Moore (2002) の結果を少し拡張した形になっています.]

- L. A. Masal'tsev 2004 Nil-manifolds cannot be immersed as hypersurfaces in Euclidean spaces, Math. Notes **76** 810–815.

  [$2n+1$ 次元ハイゼンベルグ群上の左不変計量は $\mathbf{R}^{2n+2}$ へ等長にはめ込めない ($n = 1$ のときに Rivertz が示した結果の拡張). A.A.Borisenko, On isometric immersion of nilmanifolds in Euclidean space, Math. Notes **87** (2010) 122–124 では, この結果を改良して $\mathbf{R}^{4n}$ にはめ込めないことを示しています. 群を別のものに変えると, どのような結果になるのでしょうか? 果てしなく疑問が広がります.]

- L. A. Florit, W. S. Hui, F. Zheng 2005 On real Kähler Euclidean submanifolds with non-negative Ricci curvature, J. Europ. Math. Soc. **7** 1–11.

  [実 $2n$ 次元正曲率ケーラー多様体のクラス数は n 以上.]

- V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, B. Thibert 2012 Flat tori in three-dimensional space and convex integration, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **109** 7218–7223.

  [2 次元平坦トーラスを $\mathbf{R}^3$ に C^1 級等長に埋め込む. 接平面は明確に定まっているのだが, 法ベクトルがフラクタル状になる. ここに掲載されているグラフィックは一見の価値あり. 大槻の定理により, C^∞ 級に $\mathbf{R}^3$ へ埋め込むことはできない.]

- F. Fontenele, F. Xavier, 2014 On the complexity of isometric immersions of hyperbolic spaces in any codimension, arXiv:1410.8465 [math.DG] pp.1–13.

  [双曲空間 H^m から $\mathbf{R}^n$ への等長埋め込みによる, 像の複雑さを主張. H^m 上では遠く離れたところにあった点が, 等長埋め込み写像により $\mathbf{R}^n$ の近くの点に写るという現象が, 余次元の値に関わらず双曲空間の場合必ず起こる. 従って像はいびつな形状にならざるを得ない.]

- H. Mirandola, F. Vitório 2015 Global isometric embeddings of multiple warped product metrics into quadrics, Kodai Math. J. **38** 119–134.

  [$\rho(t)^2dt^2 + \eta_1(t)^2dx_1^2 + \cdots + \eta_{n-1}(t)^2dx_{n-1}^2$ の形の計量をもつリーマン多様体について, ある次元の定曲率空間への大域的等長埋め込み · はめ込みを構成. Blanuša の構成法に手を加えたもの. 例えば Sol_3 は大域的に $\mathbf{R}^9$ にはめ込め, $\mathbf{R}^{17}$ に埋め込める.]

以上です. 講演 2 日目に紹介した対称空間に関する私達 (阿賀岡–兼田) の結果については, 冒頭に引用した ' 数学' の論説, そこに引用した文献, 及び文末の表を見ていただけたら幸いです. 表には現時点における状況を纏めておきました (論説にある表より, 若干データが新しいものに更新されています). 一つ一つの数値の根拠については論説にある文献をご覧になって下さい.

私達は一つの強力な道具として " 擬平坦数"(pseudo-nullity) という曲率により定まる不変量を導入し, それを足場に多くの事実を示してきました. しかし, この方法だけでは余次元 $= n$ のところに大きな壁が立ちはだかり, まだそれを突き破ることができていません. 対称空間に話を限るとしても, 解かねばならない問題・発見せねばならない事柄が数多くある, というのが私達の実感するところです.

小林昭七–野水克己, Foundations of Differential Geometry Vol.II, John Wiley & Sons (1969) の p.355 には

Once we know that every Riemannian manifold can be isometrically imbedded in a Euclidean space of sufficiently large dimension, we naturally seek for a Euclidean space of smallest possible dimension in which a Riemannian manifold can be isometrically imbedded.

と記されています. この問題に関する幾何学者の発言を二つ引用して, この外史を閉じます.

However, if we pose the question of the greatest possible lowering of the codimension $N-p$, then even in the local formulation the problem is far from completely solved, and in the global formulation presented above we are only at the first steps of the development. "The problem of immersing a Riemannian metric in Euclidean space", said A. D. Aleksandrov in one of his public lectures (Moscow State University, May 1970), "is a tangle of non-linear problems". (From p.101 of E. R. Rozendorn, Surfaces of negative curvature, Geometry III, Encyclopaedia of Math. Sci. Vol.**48**, (eds. Y. D. Burago, V. A. Zalgaller), Springer, 1992.)

In the past we have had some very special results about the non-existence of isometric imbeddings of certain Riemannian manifolds in other Riemannian manifolds. For example, a compact surface of everywhere negative curvature cannot be isometrically imbedded, or even immersed in $\mathbb{R}^3$, nor can a complete surface of constant negative curvature be isometrically immersed in $\mathbb{R}^3$. Ideally, differential geometry should be replete with such results, so that we could have a reasonable chance of finding the smallest dimensional Euclidean space into which a given Riemannian manifold can be isometrically imbedded. But at present only quite isolated facts are known, and a general theory can hardly be said to exist. (From p.192 of M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol.V, Publish or Perish, 1975.)

これらの文章が未だに古びていないのは, 誠に遺憾なことです. くどいようですが, 再度強調しておきます:

Ideally, differential geometry should be replete with such results.

多様・多彩な事柄を積み上げる営みは, 間違いなく数学の生命線の一つです.

対称リーマン空間の局所等長埋め込み

	G/K	$\dim G/K$	class (G/K)
AI	$SU(n)/SO(n)\quad(n\geq 3)$	$\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$	$\frac{1}{2}n(n-1)\sim\frac{1}{2}n(n+1)+1$
AII	$SU(2n)/Sp(n)\quad(n\geq 3)$	$(n-1)(2n+1)$	$n(n-1)\sim n(2n-1)+1$
$AIII$	$P^2(\mathbf{C})$	4	$3\sim 4$
	$P^n(\mathbf{C})\quad(n\geq 3)$	$2n$	$2n-2\sim n^2$
	$SU(p+2)/S(U(p)\times U(2))$ $(p\geq 2)$	$4p$	$\min\{[\frac{1}{2}(7p-3)],3p+1\}\sim p^2+3$
	$SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ $(p\geq q\geq 3)$	$2pq$	$2pq-p-q+\min\{p-q,2\}$ $\sim p^2+q^2-1$
BDI	$*Q^3(\mathbf{C})\simeq Sp(2)/U(2)$	6	4
	$Q^n(\mathbf{C})\quad(n\geq 4)$	$2n$	$[\frac{1}{5}(6n+2)]\sim\frac{1}{2}n(n-1)+1$
	$SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$ $(p\geq q\geq 3)$	pq	$pq-p+\min\{p-q,1\}$ $\sim\frac{1}{2}p(p+1)+\frac{1}{2}q(q+1)-1$
$BDII$	$*S^n\quad(n\geq 2)$	n	1
	$*H^n\quad(n\geq 2)$	n	$n-1$
CI	$*Sp(n)/U(n)\quad(n\geq 1)$	$n(n+1)$	n^2
CII	$*P^2(\mathbf{H})$	8	6
	$P^n(\mathbf{H})\quad(n\geq 3)$	$4n$	$4n-3\sim n(2n-1)$
	$Sp(p+2)/Sp(p)\times Sp(2)$ $(p\geq 2)$	$8p$	$\min\{8p-6,7p-1\}\sim p(2p-1)+5$
	$Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$ $(p\geq q\geq 3)$	$4pq$	$4pq-p-3q+\min\{p-q,4\}$ $\sim p(2p-1)+q(2q-1)-1$
$DIII$	$SO(8)/U(4)\simeq Q^6(\mathbf{C})$	12	$7\sim 16$
	$SO(2n)/U(n)\quad(n\geq 5)$	$n(n-1)$	$\frac{1}{2}n(n-1)\sim n^2$

対称リーマン空間の局所等長埋め込み (続)

	G/K	$\dim G/K$	class (G/K)
EI	$E_6/Sp(4)$	42	$36 \sim 660$
EII	$E_6/SU(2)\cdot SU(6)$	40	$20 \sim 610$
$EIII$	$E_6/Spin(10)\cdot SO(2)$	32	$16 \sim 46$
EIV	E_6/F_4	26	$12 \sim 28$
EV	$E_7/SU(8)$	70	$63 \sim 1393$
EVI	$E_7/Spin(12)\cdot SU(2)$	64	$32 \sim 1475$
$EVII$	$E_7/E_6\cdot SO(2)$	54	$27 \sim 79$
$EVIII$	$E_8/Spin(16)$	128	120 以上
EIX	$E_8/E_7\cdot SU(2)$	112	$56 \sim 3763$
FI	$F_4/Sp(3)\cdot SU(2)$	28	$24 \sim 296$
FII	$*F_4/Spin(9) = P^2(\mathbf{Cay})$	16	10
G	$G_2/SO(4)$	8	$6 \sim 19$
	$SO(n)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	$\begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1) - 2\left[\frac{n}{2}\right] \sim \frac{1}{2}n(n+1) & (n=7,8,9) \\ \frac{1}{2}n(n-5)+1 \sim \frac{1}{2}n(n+1) & (n \geq 10) \end{cases}$
	$SU(n)$	n^2-1	$\begin{cases} n^2 - \left[\frac{3}{2}n\right] \sim n^2+1 & (n=3,4,5) \\ n^2-2n \sim n^2+1 & (n \geq 6) \end{cases}$
	$*Sp(n) \quad (n \geq 1)$	$n(2n+1)$	$n(2n-1)$
	E_6	78	$62 \sim 1380$
	E_7	133	$106 \sim 3003$
	E_8	248	212 以上
	F_4	52	$43 \sim 624$
	G_2	14	$10 \sim 35$

• クラス数 class (G/K) は，対称リーマン空間 G/K が $\mathbf{R}^N$ に局所等長に埋め込み可能となる最小余次元を示す.

• G/K の前の $*$ は，クラス数 class (G/K) が確定していることを示す．これらの空間のうち，$S^2 = Sp(1)/U(1)$, H^n $(n \geq 2)$ 以外については，最小次元の局所等長埋め込みは剛性をもつ.

対称リーマン空間の擬平坦数 (pseudo-nullity)

	G/K	$\dim G/K$	$p(G/K)$
AI	$*SU(n)/SO(n) \quad (n \geq 3)$	$\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$	$n-1$
AII	$SU(2n)/Sp(n) \quad (n \geq 3)$	$(n-1)(2n+1)$	$n+3[\frac{1}{2}n]-1$ 以上
$AIII$	$*P^n(\mathbf{C}) \quad (n \geq 2)$	$2n$	$\max\{n-1, 2\}$
	$*SU(p+2)/S(U(p) \times U(2))$ $(p \geq 2)$	$4p$	$\max\{p-1, [\frac{1}{2}p]+2\}$
	$SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$ $(p \geq q \geq 3)$	$2pq$	$\max\{[\frac{1}{2}(2p+q-3)], [\frac{3}{2}q]\}$ 以上
BDI	$*SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ $(p \geq q \geq 2)$	pq	$\max\{p-1, q\}$
$BDII$	$*S^n \quad (n \geq 2)$	n	$n-1$
CI	$*Sp(n)/U(n) \quad (n \geq 1)$	$n(n+1)$	n
CII	$*P^n(\mathbf{H}) \quad (n \geq 2)$	$4n$	$\max\{n-1, 3\}$
	$*Sp(p+2)/Sp(p) \times Sp(2)$ $(p \geq 2)$	$8p$	$\max\{p+1, 6\}$
	$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$ $(p \geq q \geq 3)$	$4pq$	$\max\{p+2q-3, 3q\}$ 以上 ($q=1,2$ のときはこの値に一致)
$DIII$	$SO(2n)/U(n) \quad (n \geq 5)$	$n(n-1)$	$\begin{cases} m+3[\frac{1}{2}m] \text{ 以上} & n=2m \\ [\frac{5}{2}m] \text{ 以上} & n=2m+1 \end{cases}$
EI	$*E_6/Sp(4)$	42	6
EII	$E_6/SU(2) \cdot SU(6)$	40	5 以上
$EIII$	$E_6/Spin(10) \cdot SO(2)$	32	7 以上
EIV	E_6/F_4	26	9 以上
EV	$*E_7/SU(8)$	70	7
EVI	$E_7/Spin(12) \cdot SU(2)$	64	7 以上
$EVII$	$E_7/E_6 \cdot SO(2)$	54	10 以上
$EVIII$	$*E_8/Spin(16)$	128	8
EIX	$E_8/E_7 \cdot SU(2)$	112	11 以上
FI	$*F_4/Sp(3) \cdot SU(2)$	28	4
FII	$*F_4/Spin(9) = P^2(\mathbf{Cay})$	16	7
G	$*G_2/SO(4)$	8	2

対称リーマン空間の擬平坦数 (pseudo-nullity) (続)

G	$\dim G$	$p(G)$
$SO(2n+1)$	$n(2n+1)$	$\begin{cases} 2n & 1 \leq n \leq 4 \\ 2n \sim 4n+1 & n \geq 5 \end{cases}$
$SO(2n)$	$n(2n-1)$	$\begin{cases} n+2[\frac{1}{2}n] & 1 \leq n \leq 4 \\ n+2[\frac{1}{2}n] \sim 4n-1 & n \geq 5 \end{cases}$
$SU(n)$	n^2-1	$\begin{cases} [\frac{3}{2}n]-1 & 2 \leq n \leq 5 \\ [\frac{3}{2}n]-1 \sim 2n-1 & n \geq 6 \end{cases}$
$*Sp(n) \quad (n \geq 1)$	$n(2n+1)$	$2n$
E_6	78	$10 \sim 16$
E_7	133	$14 \sim 27$
E_8	248	$16 \sim 36$
F_4	52	$8 \sim 9$
$*G_2$	14	4

G/K の前の $*$ は，擬平坦数 $p(G/K)$ が確定していることを示す.
また $p(\mathbf{R}^n) = n$ であり, G/K が平坦でなければ $p(G/K) \leq \dim G/K - 1$.

双曲空間 H^n から $\mathbf{R}^N$ への“最小次元”等長写像 (N の値)

	C^1-級	C^∞-級	C^ω-級
局所埋め込み	$n+1$	$2n-1$	$2n-1$
大域埋め込み	$n+1$	$\begin{cases} n=2 & 4\sim 6 \\ n\geq 3 & 2n-1\sim 6n-6 \end{cases}$	$\begin{cases} n=2 & 4\sim 14 \\ n\geq 3 & 2n-1\sim \frac{1}{2}(n+2)(n+5) \end{cases}$
$\geq$			
大域はめ込み	$n+1$	$\begin{cases} n=2 & 4\sim 5 \\ n\geq 3 & 2n-1\sim 4n-3 \end{cases}$	$\begin{cases} n=2 & 4\sim 14 \\ n\geq 3 & 2n-1\sim \frac{1}{2}(n+2)(n+5) \end{cases}$

なお, 本文にも記しました通り, Gromov の Partial Differential Relations (1986) の 277 ページには, 双曲空間 H^n から $\mathbf{R}^{8n-8}$ $(n\geq 2)$ への解析的大域等長埋め込みを構成せよという練習問題が記されています.

文献に一通り目を通すだけで少なからぬ時間を要しました. しかしそのおかげで, 私自身多くの事柄について認識を改めることができ, 等長埋め込み問題に関する輪郭・全体像が朧気に見えてきたような気がしています. 今回のような機会が訪れなければ決してこのような (無謀な?) 試みに手を出すことはなかったでしょう. その意味で, 講演＋原稿改訂の機会を与えて頂いた間下克哉氏・田崎博之氏に, 最後になりましたが深く感謝致します.

2008.5

2012 年 11 月に北海道大学で等長埋め込みに関する集中講義を行いました. その際の参考資料として本原稿を配布しました. 改めて原稿を読み返しますと, 不備な点が目立ち, 改訂すべき点が多く残されているのが実情です. この機会に, 本文に若干の修正・追加を行いましたが, 時間の関係もあり最小限の手入れしかできませんでした. 更なる改訂は他日を期したいと思っています. 最後の擬平坦数と双曲空間の埋め込み次元の二つの表は今回新たに付け加えたものです. 表の中に $\sim$ の記号が多く残されているのが何とも残念でなりません. 最後に, 今回古畑仁氏のお世話で北海道大学での集中講義の機会を与えて頂きました. この場を借りて, 古畑氏に深く感謝致します. 2012.11

広島大学幾何学グループの合宿セミナーにおける講演 (合宿セミナー 2017 in 大久野島) に合わせて, 若干の修正, 文献の追加を行いました. 表は 2012 年版のものと全く同じです.

2017.12