平均曲率一定曲面の Bianchi-Baecklund 変換と Darboux 変換について (Bianchi-Baecklund and Darboux transformations of constant mean curvature surfaces)

神戸大学自然科学研究科 博士課程後期 3 年 小林 真平

概 要

We show that Bianchi-Bäcklund transformation of a constant mean curvature surface is equivalent to the Darboux transformation.

1 Bianchi-Baecklund 変換

平均曲率一定曲面 (以下 CMC 曲面と呼ぶ) 上の Bianchi-Baecklund 変換と Darboux 変換が同値であることを示す. より詳しくは論文 [5] を参照して頂きたい.

最初に, CMC 曲面に対する Baecklund 変換を Bianchi の方法で紹介する (Bianchi-Baecklund 変換). アイデアは CMC 曲面に対する接線叢の変換を考えるのではなく, 対応するガウス曲率一定正の曲面に対する接線叢を考える所とさらにこの接線叢を実ではなく複素接線叢であると考える所である.

1.1 CPC 曲面の Bianchi-Baecklund 変換

Σ を $\mathbb{R}^2$ の単連結領域とし, $f_\kappa : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ を以下の曲率線座標で表されるガウス曲率一定正 $K = +1$ の曲面とする (以下 CPC 曲面と呼ぶ).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I &=& \cosh(u)^2 dx^2 + \sinh(u)^2 dy^2 \\ I\!I &=& -\sinh(u)\cosh(u)(dx^2 + dy^2) \end{array} \right. , \tag{1.1}$$

ここで $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ は sinh-Gordon (Gauss) 方程式

$$\Delta u = -\sinh(u)\cosh(u) \ .$$

の解とし, Δ は I に関するラプラシアンとする.

今 f_κ に対して複素接線叢を考える.

$$f_\kappa^\lambda = f_\kappa + \lambda(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) \ , \tag{1.2}$$

ここで, $[e_1, e_2, e_3]$ は f_κ の正規直交枠, λ は零でない定数, $\varphi : \Sigma \to \mathbb{C}$ は複素数値関数とする．今 $[e_1^\lambda, e_2^\lambda, e_3^\lambda]$ を f_κ^λ の正規直交枠とする．複素接線叢に対して次の 2 つの条件を課す:

(i) ベクトル $f_\kappa^\lambda - f_\kappa$ は両方の曲面に接する, つまり $\langle f_\kappa^\lambda - f_\kappa, e_3\rangle = \langle f_\kappa^\lambda - f_\kappa, e_3^\lambda\rangle = 0$, ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の標準的内積の複素双線型拡張とする．

(ii) 対応する点の法ベクトル e_3 と e_3^λ は定数の角度を持つ, つまり $\langle e_3, e_3^\lambda\rangle = c$, ここで c は複素数の定数とする．

計算によって

$$(\cot\sigma)^2 + \frac{1}{\lambda^2} = -1 \tag{1.3}$$

が分かるので, パラメータを次の様に変更する．$\sigma = -i\cosh\beta$, $1/\lambda = \sinh\beta$ と $\varphi = i\theta_\beta$. この時方程式 (1.2) は次の様に書く事ができる．

$$f_\kappa^\lambda = f_\kappa^\beta = f_\kappa + 1/\sinh(\beta)(\cosh(\theta_\beta)e_1 + i\sinh(\theta_\beta)e_2)\ , \tag{1.4}$$

ここで β は零でない複素定数, $\theta_\beta : \Sigma \to \mathbb{C}$ は複素数値関数である．今から $f_\kappa^\beta = f_\kappa^\lambda$, $[e_1^\beta, e_2^\beta, e_3^\beta] = [e_1^\lambda, e_2^\lambda, e_3^\lambda]$ とおく．

θ_β に対して次の微分方程式が成り立つ事が分かる．

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(\theta_\beta - u)_z &=& e^\beta \sinh(\theta_\beta + u) \\ 2(\theta_\beta + u)_{\bar z} &=& -e^{-\beta}\sinh(\theta_\beta - u) \end{array}\right. , \tag{1.5}$$

ここで $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$.

再び方程式 (1.4) で定義される曲面 f_κ^β にたいして Bianchi-Baecklund 変換を以下の様に考える．

$$f_\kappa^{\beta,\beta^*} = f_\kappa^\beta + 1/\sinh(\beta^*)(\cosh(\hat\theta_{\beta,\beta^*})e_1^\beta + i\sinh(\hat\theta_{\beta,\beta^*})e_2^\beta)\ , \tag{1.6}$$

ここで β^* は零でない複素定数, $\hat\theta_{\beta,\beta^*} : \Sigma \to \mathbb{C}$ は複素数値関数である．$\hat\theta_{\beta,\beta^*}$ は以下の微分方程式の解

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(\hat\theta_{\beta,\beta^*} - \theta_\beta)_z &=& e^{\beta^*} \sinh(\hat\theta_{\beta,\beta^*} + \theta_\beta) \\ 2(\hat\theta_{\beta,\beta^*} + \theta_\beta)_{\bar z} &=& -e^{-\beta^*}\sinh(\hat\theta_{\beta,\beta^*} - \theta_\beta) \end{array}\right. . \tag{1.7}$$

再び $\hat\theta_{\beta,\beta^*}$ は複素 sinh-Gordon 方程式 $\Delta\hat\theta_{\beta,\beta^*} = -\sinh(\hat\theta_{\beta,\beta^*})\cosh(\hat\theta_{\beta,\beta^*})$ の解である．この時, Bianchi の可換律の定理が導かれる．

定理 1.1. (Bianchi [1], 494 頁) *f_κ を $K = +1$, 正規直交枠 $[e_1, e_2, e_3]$ を持つ CPC 曲面で, 方程式 (1.1) で定義される第一基本形式と第二基本形式を持つとする．θ_β (resp. θ_{β^*}) を初期条件 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, パラメータ β (resp. β) である微分方程式 (1.5) の解とする．さらに $\hat\theta_{\beta,\beta^*}$ (resp. $\hat\theta_{\beta^*,\beta}$) をパラメータ β^* (resp. β) である微分方程式 (1.7) の解とする．さらに, $\hat f_\kappa^{\beta,\beta^*}$ (resp. $\hat f_\kappa^{\beta^*,\beta}$) を方程式 (1.6) で定義される曲面とする．この時次が成立する．*

$$f_\kappa^{\beta,\beta^*} = f_\kappa^{\beta^*,\beta}\ . \tag{1.8}$$

今後, $\hat{f}_\kappa = f_\kappa^{\beta,\beta^*} = f_\kappa^{\beta^*,\beta}$ という表記を用いる. 実の曲面を見付ける為に, 次の仮定をおく.

$$\beta^* = -\bar{\beta} \ . \tag{1.9}$$

この時, 方程式 (1.5) から $\theta_{\beta^*} = \pi i - \overline{\theta_\beta}$ がわかる. 最終的に次の定理を得る.

定理 1.2. (Bianchi [1], 496 頁) f_κ を $K = +1$, 正規直交枠 $[e_1, e_2, e_3]$ を持つ CPC 曲面で第一基本形式と第二基本形式が方程式 (1.1) されるものとする. θ_β を零でない複素パラメータ β, 初期条件 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ である 微分方程式 (1.5) の解とする. さらに β^* を (1.9) で定義されるパラメータとし, $\theta_{\beta^*} = \pi i - \overline{\theta_\beta}$ を微分方程式 (1.5) の解とする.

$\hat{f}_\kappa$ を上で定義される *Bianchi-Baecklund* 変換を 2 回行ったももとする. この時 $\hat{f}_\kappa$ は $K = +1$, 実 CPC 曲面で

$$\hat{f}_\kappa = f_\kappa + \Lambda_\kappa \alpha_\kappa \ ,$$

ここで

$$\Lambda_\kappa = -\frac{\sinh(2\,\mathrm{Re}\,\beta)}{|\sinh(\beta)|^2[\cosh(2\,\mathrm{Re}\,\beta) + \cosh(2\,\mathrm{Re}\,\theta_\beta)]} \ , \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} \alpha_\kappa = {} & [-\cosh(\theta_\beta)\cosh(\bar{\beta}) - \cosh(\overline{\theta_\beta})\cosh(\beta)]e_1 \\ & + i[-\cosh(\bar{\beta})\sinh(\theta_\beta) + \cosh(\beta)\sinh(\overline{\theta_\beta})]e_2 \\ & - \sinh(2\,\mathrm{Re}\,\theta_\beta)e_3 \ . \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.2 CMC 曲面の Bianchi-Baecklund 変換

次に CMC 曲面に対する Bianchi-Baecklund 変換を考える. $f = f_\kappa + e_3$ を座標が (1.1) で表される CPC 曲面 f_κ の平行曲面とする. ここで e_3 を f_κ の単位法ベクトルとする. よく知られている様に, f は平均曲率 $H = 1/2$ である CMC 曲面を定める. 注意として f の単位法ベクトル n は $n = -e_3$ で表される. さらに (x, y) は f の共形曲率線座標を定める, つまり第一基本形式と第二基本形式が以下のように表される.

$$\begin{cases} I &= e^{2u}(dx^2 + dy^2) \\ II &= e^u(\sinh(u)dx^2 + \cosh(u)dy^2) \end{cases} \ . \tag{1.12}$$

CPC 曲面の Bianchi-Baecklund 変換と同じ様に, 次の定理を得る.

定理 1.3. $f = f_\kappa + e_3$ を CPC 曲面 f_κ の平行平均曲率一定 $H = 1/2$ 曲面とし, θ_β, β, θ_{β^*} と β^* を定理 *1.2* で定義される関数とパラメータとする. この

時 $\hat{f} = f + g$ は平均曲率 $H = 1/2$ である CMC 曲面を定める．ここで g は

$$
\begin{aligned}
(1.13)\quad g = |\operatorname{csch}\beta|^2 \operatorname{sech}(\operatorname{Re}(\theta+\beta))\,\{&\sinh(2\operatorname{Re}\beta)\cos(\operatorname{Im}(\theta+\beta))e_1 \\
&- \sinh(2\operatorname{Re}\beta)\sin(\operatorname{Im}(\theta+\beta))e_2 \\
&+[\cos(2\operatorname{Im}\beta)\cosh(\operatorname{Re}(\theta+\beta)) - \cosh(\operatorname{Re}(\theta-\beta))]e_3\} \quad ,
\end{aligned}
$$

ここで $\operatorname{csch} x = 1/\sinh x$, $\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$.

上の定理から, CMC 曲面に対する Bianchi-Baecklund 変換を定める事ができる．

定義 1. f と $\hat{f}$ を定理 1.3 で定義されるはめ込みでパラメータが $\beta \in \mathbb{R}$ もしくは $\beta = \beta_1 + i\pi/2$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$ とする．この時 $\hat{f}$ を CMC 曲面 f の *Bianchi-Baecklund* 変換と呼ぶ．特に, もしパラメータが $\beta \in \mathbb{R}$ (resp. $\beta = \beta_1 + i\pi/2$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$) の時 $\hat{f}$ を実の *Bianchi-Baecklund* 変換 (resp. 虚の *Bianchi-Baecklund* 変換) と呼ぶ.

2 Darboux 変換と Bianchi-Baecklund 変換の同値性

この節では, 平均曲率一定曲面上の Bianchi-Baecklund 変換と Darboux 変換が等しい事を示す．前節では, Bianchi-Baecklund 変換について見た．この節では [3] から Darboux 変換の定義を引用する．

定義 2. (Hertrich-Jeromin, Pedit [3] 316 頁) 二つの共形曲率線座標を持つ曲面が球叢によって接しており, かつその対応が共形曲率線を保つとき, これらを Darboux 対と呼ぶ．一方に対してもう一方を Darboux 変換と呼ぶ.

ここから, $\mathbb{R}^3$ を $\operatorname{Im}\mathbb{H}$ と同一視する, ここで $\mathbb{H}$ は四元数体とする．[3] から, 次の必要十分条件を得る．

定理 2.1. (Hertrich-Jeromin, Pedit [3]) f を共形曲率線座標をもつ平均曲率一定 H である曲面とし，$f^c = f + \frac{1}{H}n$ をその平行平均曲率一定曲面とする, ここで n は f の単位法ベクトルとする．$r \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ をパラメータとし，ξ を適当な初期条件 $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ をもつ 次の *Riccati* 方程式の解とする．

$$
(2.1)\qquad d\xi = r^2 \xi (d\bar{f}^c)\xi - df \ .
$$

その時, $\hat{f} = f + \xi$ は f の *Darboux* 変換を与える．逆に, 全ての f の *Darboux* 変換 $\hat{f}$ はこの様にして得られる．特に, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ で定義される $\hat{f}$ (*resp.* $r \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$) を正の *Darboux* 変換 (*resp.* 負の *Darboux* 変換) と言う．

最終的に次の定理を得る．

定理 2.2. *f を共形曲率線座標で表された $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定 $H = 1/2$ の曲面とする．この時次は同値である．*

(1) Bianchi-Baecklund 変換,

(2) Darboux 変換.

参考文献

[1] L. Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Leipzig, Berlin, Druck und Verlag von B. G. Teubner (1910).

[2] F. E. Burstall, *Isothermic surfaces: conformal geometry, Clifford algebras and integrable systems*, Integrable systems, Geometry and Topology, International Press, to appear.

[3] U. Hertrich-Jeromin, F. Pedit, *Remarks on the Darboux transform of isothermic surfaces*, Doc. Math. 2, 313–333 (1997).

[4] S-P. Kobayashi *Bubbletons in 3-dimensional space forms*, Balkan J. Geom. Appl. **9** (2004), no. 2, 44-68.

[5] S-P. Kobayashi, J. Inoguchi, *Characterizations of Bianchi-Bäcklund transformations of constant mean curvature surfaces*, Internat. J. Math., to appear.

[6] N. Schmitt, *CMCLab*, http://www.gang.umass.edu/software.

[7] I. Sterling, H. C. Wente, *Existence and classification of constant mean curvature multibubbletons of finite and infinite type*, Indiana U. Math. J. 42(4), 1239-1266 (1993).