Hamiltonian stability of Lagrangian tori in toric Kähler manifolds

小野　肇*

東京都立大学　日本学術振興会特別研究員（ＰＤ）

Abstract

In this talk, we see that the complex projective space $(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$ and their product $(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m, a\omega_{FS} \oplus b\omega_{FS})$ are locally Hamiltonian volume minimizing Lagrangian torus fibrations.

1　イントロダクション

(M^{2n}, ω) をシンプレクティック多様体, $L^n \subset M$ をラグランジュ部分多様体とする. (M, ω) のハミルトン微分同相写像全体のなす群を $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ と書く. このとき, ハミルトン微分同相写像で L を動かして得られる M の部分多様体全体のなす空間を $\mathrm{Ham}(L)$ と書く, つまり,

$$\mathrm{Ham}(L) = \{\varphi(L) \subset M | \varphi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)\}.$$

ここで, ハミルトン微分同相写像はシンプレクティック形式を保つので $\mathrm{Ham}(L)$ の任意の元はラグランジュ部分多様体であることがわかる.

　さて, 今さらに, ω-compatible な複素構造 J があり（つまり, (M, J, ω) がケーラー多様体）, L がコンパクトであるとすると, $\mathrm{Ham}(L)$ 上の体積汎関数

$$\mathrm{Vol} : \mathrm{Ham}(L) \to \mathbb{R}$$

を考えることが出来, この汎関数の停留点（ハミルトン極小と呼ぶ）, 極小点（局所ハミルトン体積最小と呼ぶ）および最小点（ハミルトン体積最小と呼ぶ）を考える事が出来る. このような概念は Y.-G. Oh により導入された（[Oh1], [Oh2] 参照）. 例えば 2 次元単位球面 $S^2(1)$ の小円は等周不等式によりハミルトン体積最小（つまり, $S^2(1)$ はハミルトン体積最小ラグランジュファイブレーション）である事がわかる. もちろん, 小円は一般には通常の部分多様体論での極小部分多様体ではないし, 大円は極小部分多様体では

*E-mail address: onola@comp.metro-u.ac.jp

あるが不安定である事に注意すると, このような体積最小性は「ハミルトン微分同相写像で動かす」という条件を付けてはじめて成り立つことがわかる.

今, $S^2(1) = \mathbb{CP}^1$ と思うと, 次の疑問が生じる；

問 1.1. T^n は $(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$ に次の作用によりハミルトン作用する；

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \cdot [z^0 : \cdots : z^n] = [z^0 : e^{i\theta_1} z^1 : \cdots : e^{i\theta_n} z^n]$$

このとき, 任意の $[z^0 : \cdots : z^n]$ $(^\forall j,\ z^j \neq 0)$ に対してその T^n-軌道はハミルトン体積最小か？

この疑問に関する部分解が今回の主結果である；

定理 1.2 ([O]). 任意の $[z^0 : \cdots : z^n]$ $(^\forall j,\ z^j \neq 0)$ に対してその T^n-軌道は局所ハミルトン体積最小である.（つまり, $\mathbb{CP}^n$ は局所ハミルトン体積最小ラグランジュトーラスファイブレーションである.）また, $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ の任意の点 $([z^0 : \cdots : z^n], [w^0 : \cdots : w^m])$ $(^\forall j, ^\forall k\ ,\ z^j, w^k \neq 0)$ の T^{n+m}-軌道も局所ハミルトン体積最小である.

注 1.3. ハミルトン安定ラグランジュ部分多様体の直積は一般にはハミルトン安定とは限らないので, 複素射影空間の直積のケースはあまり当たり前ではない.（*[O]* 参照）

2 定理の証明

この章では定理 1.2 の前半の証明の概略を述べる.

2.1 トーリックケーラー多様体

基本的なアイデアは, タイトルにあるように, トーリックケーラー多様体のよく知られた枠組みの中で考えることである. そこで, まず, 必要な道具について復習する. 詳しくは [A], [G] を参照.

まず, $\mathbb{R}^n$ の凸多面体 Δ が次の 3 つの条件を満たすとき Delzant polytope と呼ぶ；

- 各頂点では n 本の辺が交わる
- 頂点を p とすると, p で交わる辺は $p + tu_j$ $(t \geq 0, u_j \in \mathbb{Z}^n, j = 1, \dots, n)$ と書ける
- $\{u_1, \dots, u_n\}$ は $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$-基底

Delzant polytope $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ が与えられると, それから canonical に決まる（代数的）トーリック多様体 (M_Δ, J_Δ) があり, さらに, ハミルトン T^n 空間 (M_Δ, ω, μ) で, $\mathrm{Image}\,\mu = \Delta$ となるものが存在する.（ここで一般にリー群 G に対して (M, ω, μ) がハミルトン G 空間であるとは, シンプレクティック多様体 (M, ω) に G がシンプレクティック形式 ω を保つように作用していて, モーメント写像と呼ばれる G 同変写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ が存在することを言う.）

J_Δ が ω-compatible なときには $(M_\Delta, J_\Delta, \omega, \mu)$ はトーリックケーラー多様体である.

事実 2.1.

- Δ の任意の内点 x に対して $\mu^{-1}(x)$ はハミルトン極小平坦ラグランジュトーラス
- $(\mathbb{C}^\times)^n \curvearrowright M_\Delta$ の *open dense orbit* $(= \mu^{-1}(\mathring{\Delta})) \simeq (\mathbb{C}^\times)^n \overset{\log}{\simeq} \mathbb{R}^n \times i(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ 上で T^n-不変ケーラーポテンシャル $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在する．つまり, $\omega = 2i\partial\bar{\partial}\varphi$ と書ける．

<u>**ポイント**</u>　様々な量がケーラーポテンシャルの微分で書ける；
$(\boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^n \times i(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ とすると

1 階微分	$\longrightarrow$	モーメント写像　$\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{u}}(+\mathrm{const.})$
2 階微分	$\longrightarrow$	ケーラー計量, ケーラー形式
3 階微分	$\longrightarrow$	後で
4 階微分	$\longrightarrow$	$(M_\Delta, J_\Delta, \omega)$ のリッチ形式

2.2　第二変分公式

定理 2.2 (第二変分公式, Y.-G. Oh, [Oh2]). ケーラー多様体のハミルトン極小ラグランジュ部分多様体 $L \subset (M, J, \omega)$ と任意の L のハミルトン変分 $\{L_t\}_{-\varepsilon<t<\varepsilon}$ $s.t$ $\frac{dL_t}{dt}_{|t=0} = J\,\mathrm{grad}\,f$ $(f \in C^\infty(L))$ に対して

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}\mathrm{Vol}(L_t) = \int_L \{(\Delta f)^2 - \mathrm{Ric}_M(J\,\mathrm{grad}\,f, J\,\mathrm{grad}\,f) - 2\langle df \otimes df \otimes JH, JS\rangle + \langle \mathrm{grad}\,f, JH\rangle^2\} d\mu, \tag{2.1}$$

が成り立つ．ここで, H と S はそれぞれ L の平均曲率ベクトルと第二基本形式である．

ここで, ハミルトン極小ラグランジュ部分多様体は一般には 0 でない平均曲率ベクトルを持つので, 極小部分多様体の第二変分公式と異なり, H と S を含む事に注意する．このように, 第二変分公式は多少複雑な形をしているが, トーリックケーラー多様体 $(M_\Delta, J_\Delta, \omega, \mu)$ の T^n-軌道 $\mu^{-1}(x)$ $(x \in \mathring{\Delta})$ の場合は, 主に次の 2 つの点からかなり簡単になることがわかる；

- $\mu^{-1}(x)$ は平坦トーラスであり, さらに, ラプラシアンの固有値をポテンシャル φ の 2 階微分を用いて具体的に表す事が出来る．
- 第二基本形式 S は φ の 3 階微分で求まる．

実際, ハミルトン安定性は次のような $\mathbb{Z}^n$ 上の 4 次式の非負性と同値である事がわかる．

命題 2.3 ([O]). $\mu^{-1}(x)$ がハミルトン安定 $\iff$ 任意の $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$(g^{ij}m_im_j)^2 - g^{ik}g^{jl}R_{ij}m_km_l - 2g^{il}g^{jm}g_{kn}H^kS^n_{lm}m_im_j + (H^im_i)^2 \geq 0. \tag{2.2}$$

ここで

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{u})}{\partial u^i \partial u^j},\ R_{ij} = \mathrm{Ric}_M \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right),\quad S_{ij}^l = -\frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial^3 \varphi(\boldsymbol{u})}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}\ \ and\ H^i = g^{jk} S_{jk}^i. \tag{2.3}$$

$g^{ij}, g_{ij}, R_{ij}, H^i,\ S_{ij}^k$ は $\mu^{-1}(x)$ 上一定である事に注意する.

さらに, $(M_\Delta, J_\Delta, \omega)$ がトーリックケーラー・アインシュタイン多様体の場合にはモンジュ・アンペール方程式を満たすようなポテンシャルが採れ, (2.2) の左辺はより簡単に計算できる事がわかる（実際複素射影空間の時にはこの事実を用いて計算がかなり簡略化できる, 詳しくは [O] 参照）.

2.3　複素射影空間の場合

まず, $(\mathbb{C}^\times)^n$ 作用の open dense orbit は

$$\{[z^0 : \cdots : z^n] | z^j \neq 0,\ {}^\forall j\} \simeq \mathbb{R}^n \times i(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$$

で, 座標

$$u^j = \log \left| \frac{z^j}{z^0} \right|, v^j = \arg \left(\frac{z^j}{z^0} \right)$$

を用いると T^n-不変ケーラーポテンシャルは

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{4} \log \left(1 + \sum_{j=1}^n \exp(2u^j) \right) - \frac{1}{2n+2} \sum_{j=1}^n u^j$$

と書ける.（このポテンシャルはモンジュ・アンペール方程式 $\det \mathrm{Hess}\, \varphi = \exp(-4(n+1)\varphi)$ を満たすので, 先ほど述べたように計算がかなり簡単になる.）後はひたすら計算すると定理 1.2 の前半が証明できる.

3　問題

最後に, ひとつ問題を挙げておく.

問 3.1. トーリックケーラー・アインシュタイン多様体 $(M_\Delta, J_\Delta, \omega, \mu)$ に対して, 任意の $\mu^{-1}(x)$ $(x \in \overset{\circ}{\Delta})$ はハミルトン体積最小か？

例えば, 複素射影空間やそれらの直積の場合にこの問題を考えるのは非常に自然である. 他のトーリックケーラー・アインシュタイン多様体については, まずは, ハミルトン安定かどうかを調べる事から考えると良いと思うのだが, 今回複素射影空間の場合の結

果だけ得られたのは, その場合しか具体的なケーラーポテンシャルの形がわからなかったというだけで, これさえわかれば命題 2.3（のモンジュ・アンペール方程式を用いた簡略化）を用いて直ちに計算できる類のものである.

一方ハミルトン体積最小性の証明は第二変分公式のような局所的な情報だけでは得られない非常に難しい問題である. 例えば, 今まで知られている例としては全測地的な $\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$（[Oh1]）と（大円）×（大円）$\subset S^2(1) \times S^2(1)$（[IOS]）しかしられていない.（(小円）×（小円）$\subset S^2(1) \times S^2(1)$ のハミルトン体積最小性は？というのが $S^2(1) \times S^2(1)$ の場合の問 3.1 である.）

References

[A] M. Abreu, Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates, Fields Institute Comm. Vol. 35, pp.1-24, AMS, 2003.

[G] V. Guillemin, Kaehler structures on toric varieties, J. Diff. Geom. **40**, 285-309, 1994.

[IOS] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, Integral geometry and Hamiltonian volume minimizing property of a totally geodesic Lagrangian torus in $S^2 \times S^2$, Proc. Japan Acad., **79**, Ser. A (2003), 167–170. arXiv:mathDG/0310432.

[Oh1] Y. -G. Oh, Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds, Invent. Math. **101** (1990), 501-519.

[Oh2] Y. -G. Oh, Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations, Math. Z. **212** (1993), 175-192.

[O] H. Ono, Hamiltonian stability of Lagrangian tori in toric Kähler manifolds, preprint.