鏡映部分多様体による Crofton の公式

田崎博之

湯沢 2004 年 12 月 1 日–3 日

1　導入

Riemann 多様体内の鏡映部分多様体とは、対合的等長変換の不動点集合の連結成分のことである。鏡映部分多様体の概念は Leung [2] によって導入された。Euclid 空間内の任意の次元の平面は鏡映部分多様体の典型的例になっている。本稿の導入として Euclid 空間内の平面の幾何学に関することから話を始める。$\mathbf{R}^n$ の等長変換全体の成す群の単位連結成分を G で表わす。B を $\mathbf{R}^n$ 内の l 次元平面とする。G の作用で B と共役になる平面全体 $\mathcal{R}(B)$ について考える。

$$\mathcal{R}(B) = \{gB \mid g \in G\}.$$

これは $\mathbf{R}^n$ 内の l 次元平面の全体に他ならない。$\mathcal{R}(B)$ は対称空間の構造を持ち、G 不変測度を持つ。$k + l \geq n$ を満たす k に対してある定数 σ が存在し

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \sigma \mathrm{vol}(N)$$

が $\mathbf{R}^n$ 内の k 次元部分多様体 N に対して成り立つ。$\mathcal{R}(B)$ 内のほとんどすべての C に対して、共通部分 $N \cap C$ は空集合になるか、または、$k + l - n$ 次元部分多様体になる。関数 $C \mapsto \mathrm{vol}(N \cap C)$ は $\mathcal{R}(B)$ 上の可測関数になり、その積分を考えることができる。上の積分公式は古典的な Crofton の公式である。後で系 4.2 においてこの積分公式のより詳しい表現を与える。Crofton の公式のいろいろな変形については Santaló の有名な積分幾何学の教科書 [5] に書かれている。この教科書は長く絶版になっていたが、幸運なことに最近 Cambridge University Press から第二版が発行された。

本稿の目的は Riemann 対称空間内の鏡映部分多様体による拡張された Crofton の公式を定式化することである。まず対称空間と鏡映部分多様体の定義を復習し、一つの鏡映部分多様体 B と共役になる鏡映部分多様体の全体 $\mathcal{R}(B)$ が対称空間の構造を持つことを定理 2.3 で示す。M がコンパクト型 Riemann 対称空間ならば、$\mathcal{R}(B)$ はコンパクト型 Riemann 対称空間になる。M が非コンパクト型 Riemann 対

称空間ならば、$\mathcal{R}(B)$ は擬 Riemann 対称空間になる。$\mathcal{R}(B)$ による Crofton の公式を定式化するためには、擬 Riemann 多様体における積分を考える必要がある。そのために擬 Riemann 多様体の標準的測度を定義する。これらの準備を元にして Riemann 対称空間内の鏡映部分多様体による Crofton の公式を定理 4.1 において定式化する。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \int_N \sigma_B(T_x N) d\mu(x).$$

ここで N は M の部分多様体である。この Crofton の公式の σ_B は部分多様体の接ベクトル空間に対して定まる積分量である。Riemann 対称空間の鏡映部分多様体 B に対する σ_B の幾何学的意味がわかっている場合はまだそんなに多くはない。

Riemann 対称空間 M が複素空間形の場合には Crofton の公式をより詳しく記述することができる。以前、著者は [6] において複素射影空間での Poincaré の公式を定式化するために、多重 Kähler 角度の概念を定義した。多重 Kähler 角度を利用すると、複素空間形における Crofton の公式に関してもより精密な記述ができる。

2 Riemann 対称空間内の鏡映部分多様体

対称空間と鏡映部分多様体の定義を復習しておく。対称空間の概念は Élie Cartan によって定式化された。ここでは、次の Loos [4] による対称空間の定義を採用することにする。

定義 2.1 微分多様体 M の各点 x に対して微分同型写像 s_x が存在し次の条件を満たすとき、M を**対称空間**と呼ぶ。

(1) 各点 x は s_x の孤立不動点である。

(2) s_x は対合的である。すなわち、$s_x^2 = 1$.

(3) $s_x(s_y(z)) = s_{s_x(y)}(s_x(z))$.

さらに M が (擬)Riemann 多様体であり各 s_x が等長的のとき、M を **(擬)Riemann 対称空間**と呼ぶ。

次の鏡映部分多様体の定義は Leung [2] による。

定義 2.2 M を完備 Riemann 多様体とする。M の対合的等長変換の不動点集合の連結成分を**鏡映部分多様体**と呼ぶ。

定理 2.3 (T.[7]) M を Riemann 対称空間とし、B を M の鏡映部分多様体とする。M の等長変換全体の成す群の単位連結成分を G で表わし、G の作用によって B と共役になる鏡映部分多様体全体を $\mathcal{R}(B)$ で表わす。

$$\mathcal{R}(B) = \{gB \mid g \in G\}.$$

このとき $\mathcal{R}(B)$ は対称空間の構造を持つ。さらに M がコンパクト型 Riemann 対称空間ならば、$\mathcal{R}(B)$ はコンパクト型 Riemann 対称空間になる。M が非コンパクト型 Riemann 対称空間ならば、$\mathcal{R}(B)$ は擬 Riemann 対称空間になる。

3 擬 Riemann 多様体上の積分

M が非コンパクト型 Riemann 対称空間の場合、前節で示したように M の鏡映部分多様体 B に対して多様体 $\mathcal{R}(B)$ は擬 Riemann 対称空間になる。鏡映部分多様体による Crofton 公式を定式化するためには $\mathcal{R}(B)$ 上の積分が必要になる。

E を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の正定値性は仮定しない。正定値内積の場合と同様に E の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は $\wedge^p E$ の内積を誘導する。これ以降、E の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が誘導する $\wedge^p E$ の内積も同じ記号 $\langle\ ,\ \rangle$ で表わすことにする。$\alpha \in \wedge^p E$ に対して $|\alpha| = |\langle \alpha, \alpha \rangle|^{1/2}$ によって $|\alpha|$ を定める。Riemann 多様体上の標準的測度の定め方と同様にして、この外積空間の長さを利用して擬 Riemann 多様体上の標準的測度を定義できる。さらに擬 Riemann 多様体の場合も、妥当な仮定のもとで余面積公式が成立する。詳しくは T. [7].

4 鏡映部分多様体による Crofton の公式

第 2 節の記号をそのまま使うことにする。条件 $\dim N + \dim B \geq \dim M$ を満たす M の部分多様体 N をとる。B による Crofton の公式を定式化するために

$$\mathcal{R}_0(B) = \{kT_oB \mid k \in K\},$$

を定める。これは原点 o を通る $\mathcal{R}(B)$ に属する鏡映部分多様体 C の o における接ベクトル空間 T_oC の全体に一致する。B の安定化部分群 $S(B)$ を

$$S(B) = \{g \in G \mid g(B) = B\}$$

によって定めると $\mathcal{R}_0(B) \cong K/(K \cap S(B))$ となり、K の両側不変 Riemann 計量が誘導する $\mathcal{R}_0(B)$ 上の K 不変 Riemann 計量を考えることができる。部分ベクトル空間 $V \subset T_oM$ が $\dim V + \dim B \geq \dim M$ を満たすならば、次の積分によって $\sigma_B(V)$ を定義することができる。

$$\sigma_B(V) = \int_{\mathcal{R}_0(B)} |\vec{V}^\perp \wedge \vec{\mathfrak{c}}^\perp| d\mu(\mathfrak{c}).$$

ここで $\vec{V}^\perp$ は $V^\perp$ の正規直交基底の外積を表わし、$\vec{\mathfrak{c}}^\perp$ も同様とする。一般の部分ベクトル空間 $V \subset T_xM$ が $\dim V + \dim B \geq \dim M$ を満たすとき、$go = x$ を満たす $g \in G$ をとり $\sigma_B(V) = \sigma_B(dg^{-1}V)$ によって $\sigma_B(V)$ を定める。σ_B を使うことによって鏡映部分多様体による Crofton の公式を定式化することができる。

定理 4.1 (T.[7]) M コンパクト型または非コンパクト型 Riemann 対称空間とし、B を M の鏡映部分多様体とする。$\dim N + \dim B \geq \dim M$ を満たす M の部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \int_N \sigma_B(T_x N) d\mu(x).$$

Howard [1] は Riemann 等質空間内の部分多様体に関する Crofton の公式について触れている。ここで扱う部分多様体のクラスは鏡映部分多様体に限られてはいるが、部分多様体のクラスの不変測度と Crofton の公式の右辺の被積分関数をより具体的に表示することができた。

$M = G/K$ が実空間形の場合には、次の古典的な Crofton の公式を得る。

系 4.2 B を n 次元実空間形 $M = G/SO(n)$ 内の l 次元全測地的部分多様体とする。$k + l \geq n$ を満たす k をとると M 内の k 次元部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \frac{\mathrm{vol}(S^{k+l-n})}{\mathrm{vol}(S^k)} \mathrm{vol}(\mathcal{R}(S^l)) \mathrm{vol}(N).$$

実空間形だけではなく複素空間形の場合も Crofton の公式のより具体的な表示を与えることができる。複素空間形の場合のより具体的な Crofton の公式の表示を次の節で与える。

5 複素空間形

複素空間形の部分多様体に関する Crofton の公式を定式化するために [6] で導入した多重 Kähler 角度を利用する。$\mathbf{C}^n$ の標準的 Kähler 形式を ω で表わす。

定義 5.1 (T.[6]) $1 < k \leq n$ とする。$\mathbf{C}^n$ 内の k 次元実ベクトル空間 V に対して $\omega|_V$ の交代二次形式としての標準形を考える。すなわち、V の双対空間 V^* の正規直交基底 $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ をとり次の標準形を得る。

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \cos\theta_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}, \qquad 0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{[k/2]} \leq \pi/2.$$

このとき $\theta(V) = (\theta_1, \ldots, \theta_{[k/2]})$ とおいて、$\theta(V)$ を V の**多重 Kähler 角度**と呼ぶ。$n < k \leq 2n - 1$ の場合は、$\mathbf{C}^n$ 内の k 次元実ベクトル空間 V に対して V の多重 Kähler 角度を $\theta(V) = \theta(V^\perp)$ によって定める。

定理 5.2 (T.[6]) V と W を $\mathbf{C}^n$ 内の同じ次元の実部分ベクトル空間とする。このとき、$\theta(V) = \theta(W)$ が成り立つための必要十分条件はある $u \in U(n)$ に対して $W = uV$ が成り立つことである。

一般的な場合を扱う前に複素空間形内の古典的な Crofton の公式をいくつか紹介しておく。そのためにLeung [3] の Theorem 7 に述べられている複素空間形内の鏡映部分多様体の分類を示しておこう。

定理 5.3 (Leung) 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ 内の鏡映部分多様体は $\mathbf{C}P^k$ $(1 \le k < n)$ と $\mathbf{C}P^n$ に自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ である。複素双曲空間 $\mathbf{C}H^n$ 内の鏡映部分多様体は、$\mathbf{C}P^n$ 内の鏡映部分多様体の双対性によって対応する全測地的部分多様体である。

これらの鏡映部分多様体を利用して次の系を得る。

系 5.4 B を n 次元複素空間形 $M = G/S(U(n) \times U(1))$ 内の複素 l 次元全測地的部分多様体とする。$k + l \ge n$ を満たす k をとると M 内の複素 k 次元複素部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{k+l-n})}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^k)} \mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{C}P^l)) \mathrm{vol}(N).$$

系 5.5 B を n 次元複素空間形 $M = G/S(U(n) \times U(1))$ 内の全測地的 Lagrange 部分多様体とする。M 内の Lagrange 部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \#(N \cap C) d\mu(C) = \frac{n+1}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^n)} \mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{R}P^n)) \mathrm{vol}(N).$$

ここで $\#X$ は X の点の個数を表わす。

次に σ_B が定数ではない場合について考えよう。[6] の Theorem 8 で述べた複素空間形内の実部分多様体に関する Poincaré の公式から次の系が従う。

系 5.6 $k, 2l < 2n \le k + 2l$ を満たす任意の自然数 k, l と n に対して変数 $\theta^{(k)} \in \mathbf{R}^{[\min\{k, 2n-k\}/2]}$ の関数 $\sigma^n_{k,l}(\theta^{(k)})$ が存在し、次の Crofton の公式が成り立つ。B^l を n 次元複素空間形 $M = G/S(U(n) \times U(1))$ 内の複素 l 次元全測地的複素部分多様体とする。M の k 次元実部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B^l)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \int_N \sigma^n_{k,l}(\theta(T_x N)) d\mu(x).$$

ここで、$\theta(T_x N)$ は $T_x N$ の多重 Kähler である。

$k < 2n \le k + n$ を満たす任意の自然数 k と l に対して変数 $\theta^{(k)} \in \mathbf{R}^{[\min\{k, 2n-k\}/2]}$ の関数 $\tau^n_k(\theta^{(k)})$ が存在し、次の Crofton の公式が成り立つ。L を n 次元複素空間形 $M = G/S(U(n) \times U(1))$ 内の全測地的 Lagrange 部分多様体とする。M の k 次元実部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(L)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \int_N \tau^n_k(\theta(T_x N)) d\mu(x).$$

ある場合には上記の $\sigma_{k,l}^n$ と τ_k^n をより精密に記述することができる。

系 5.7 B を n 次元複素空間形 $M=G/S(U(n)\times U(1))$ 内の複素 $n-1$ 次元全測地的複素部分多様体とする。M 内の 2 次元実部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \#(N\cap C)d\mu(C) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{C}P^{n-1}))}{2\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)} \int_N (1+\cos^2\theta_x)d\mu(x).$$

ここで、θ_x は N の x における Kähler 角度である。

系 5.8 B を n 次元複素空間形 $M=G/S(U(n)\times U(1))$ 内の複素 1 次元全測地的複素部分多様体とする。M 内の $2n-2$ 次元実部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \#(N\cap C)d\mu(C) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{C}P^{1}))}{2\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})} \int_N (1+\cos^2\theta_x)d\mu(x).$$

ここで、θ_x は N の x における Kähler 角度である。

系 5.9 B を 2 次元複素空間形 $M=G/S(U(2)\times U(1))$ 内の全測地的 Lagrange 部分多様体とする。M 内の 2 次元実部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \#(N\cap C)d\mu(C) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{R}P^{2}))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^{2})} \int_N (3-\cos^2\theta_x)d\mu(x).$$

系 5.10 B を 3 次元複素空間形 $M=G/S(U(3)\times U(1))$ 内の全測地的 Lagrange 部分多様体とする。M 内の 3 次元実部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \#(N\cap C)d\mu(C) = \frac{4\mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{R}P^{3}))}{3\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^{3})} \int_N (3-\cos^2\theta_x)d\mu(x).$$

系 5.9 と系**??**

系 5.11 B を 4 次元複素空間形 $M=G/S(U(4)\times U(1))$ 内の複素 2 次元全測地的複素部分多様体とする。M 内の 4 次元実部分多様体 N に対して次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{R}(B)} \#(N\cap C)d\mu(C)\\ =\ &\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{C}P^{2}))}{8\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{2})} \int_N (3+\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+3\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2)d\mu.\end{aligned}$$

ここで (θ_1,θ_2) は N の多重 Kähler 角度とする。

参考文献

[1] R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc. **106** (1993), no. 509.

[2] Dominic S. P. Leung, The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces, J. Differential Geometry, 8 (1973), 153–160.

[3] Dominic S. P. Leung, On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces, Indiana Univ. Math. J., 24 No.4 (1974), 327–339.

[4] O. Loos, Symmetric spaces I: General theory, Benjamin, New York, Amsterdam, 1969.

[5] L. A. Santaló, Integral geometry and geometric probability, Cambridge University Press, 2004.

[6] H. Tasaki, Generalization of Kähler angle and integral geometry in complex projective spaces, "Steps in Differential Geometry", Proceedings of Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, 2000 (edited by L. Kozma, P. T. Nagy and L. Tamássy) Published by the Institute of Mathematics and Informatics, University of Debrecen, 2001, pp.349–361. Available electronically at: `http://www.emis.de/proceedings/CDGD2000/`

[7] H. Tasaki, Geometry of reflective submanifolds in Riemannian symmetric spaces, preprint(2004).