実グラスマン型の表現の分岐則について

塚本千秋　(京都工芸繊維大学繊維学部)

§1 分岐則.

コンパクト等質空間 $M = G/K$ (G はコンパクト・リー群, K はその閉部分群) に関する幾何学を扱う際, 主束 $G \to G/K$ に付随するベクトル束 $E = G \times_K V_K$ (V_K は既約 K-module) の C^∞-sections の空間 $C^\infty(E)$ が G-module としてどのような既約 G-modules の直和に分解するかを求めたいことがある. Frobenius の reciprocity law を用いると, それは既約 G-module が, 作用を K に制限したとき, どのような既約 K-modules の直和に分解するか, という「分岐則」を調べることに帰着する.

実際, $C^\infty(E)$ は G 上の V_K-値 C^∞ 関数全体のなす G-module $C^\infty(G; V_K)$ の G-submodule $C^\infty(G, K; V_K)$:

$$C^\infty(G, K; V_K) = \{\, f \in C^\infty(G; V_K) \mid f(gk) = k^{-1} \cdot f(g), \quad (g \in G, k \in K) \,\}$$

と同一視され, その G-module としての既約分解を知るには, G の各既約 G-module V_G から $C^\infty(G, K; V_K)$ への G-homomorphisms の全体 $\mathrm{Hom}_G(V_G, C^\infty(G, K; V_K))$ が分かれば良い. $\mathrm{Hom}_G(V_G, C^\infty(G, K; V_K))$ の元 Φ に対して V_G から V_K への K-homomorphisms 全体 $\mathrm{Hom}_K(V_G, V_K)$ の元 Ψ を $\Psi(v) = (\Phi(v))(e)$ ($v \in V_G$, e は G の単位元) により対応させると, 同型:

$$\mathrm{Hom}_G(V_G, C^\infty(G, K; V_K)) \cong \mathrm{Hom}_K(V_G, V_K)$$

が得られる. これが Frobenius' reciprocity law である. Schur's Lemma から V_G の K-module としての既約分解中に既約 K-module V_K が存在する時にのみ $\mathrm{Hom}_K(V_G, V_K)$ は $\{\,0\,\}$ でなく, その次元は既約分解中の V_K の重複度がそれを示すことになる.

ここで重要なのは, その分岐則が, 分岐したときにある特定の既約 K-module を含むことになる全ての既約 G-modules を容易に list up 出来るように述べられていることである. そうでないと使える良い分岐則とはいえない. 具体的にはどのような事情で $C^\infty(E)$ を調べているかということにもよる.

特定の V_K について分かればそれで良いこともある. 自明な K-module $\mathbf{C}$ に対しては「球関数」の理論がそれを与えているのは御承知の通りである. しかし, 一般の V_K についての一般論は難しいようだ.

講演に際して間下克哉氏から注意があったように, stability についての情報が得られるか, というものも基準になろう. 既約 G-module はその最高重みで決定されることに注意しておく. $\mathrm{Hom}_K(V_G, V_K) \neq \{\,0\,\}$ となる V_G の最高重みに球関数の最高重みを加えたものに対応する G-module V_G' についての $\mathrm{Hom}_K(V_G', V_K)$ の次元は, 加える球関数の最高重みを十分に大きくすれば一定になるということが多くの場合に観察されている. これが stability である. stability が成立することを示すのに役立ち, 次元が一定になる球関数の最高重みの大きさが正確に評価できるような分岐則なら良い分岐則であるといえるだろう

良い分岐則が知られているコンパクト・リー群の組 $G \supset K$ というものは, 実は余り多くない. Weyl の character formula を用いると $SO(n+1) \supset SO(n)$ の場合 (正確には $SO(2n+1) \supset SO(2n)$ の場合と $SO(2n+2) \supset SO(2n+1)$ の場合) や $U(n+1) \supset U(1) \times U(n)$ の場合の非常に良い分岐則が容易に得られることは古典的に知られている. (初出を調べることはできませんでした. 申し訳ない.)

$U(n+2) \supset U(1) \times U(n+1) \supset U(1) \times U(1) \times U(n)$ と二回分岐させて, $U(1) \times U(1)$ の表現の集まり (つまりは $U(2)$ の重みの集まり) から $U(2)$ の表現を復元することにより, $U(n+2) \supset U(2) \times U(n)$ の分岐則が得られることも folklore になっているようだ.

Lepowsky [1][2] は Freudentahl や Kostant の定理に繋がる方法で, 良い $Sp(n+1) \supset Sp(1) \times Sp(n)$ の分岐則を与え, 更に $F_4 \supset Spin(9)$ の分岐則も研究している. しかし, 後者は余り良いものではなく, $P^2(Ca)$ の forms の spectra への応用やその stability は間下氏の一連の研究 [3][4] を待つことになる. 間下氏は $G_2 \supset SO(4)$ についても stability を示している.

[1] の計算はどうにも follow し難かったので, [5] で素直に Weyl's character formula を用いた証明を与えたが, その際同時に $SO(n+2) \supset SO(2) \times SO(n)$ の分岐則も与えることができた. これも正確には $SO(2n+2) \supset SO(2) \times SO(2n)$ の場合と $SO(2n+3) \supset SO(2) \times SO(2n+1)$ の場合に分かれる.

El Chami Sayah 氏は $SO(n+4) \supset SO(2) \times SO(n+2) \supset SO(2) \times SO(2) \times SO(n)$ のように何度もこの分岐則を適用して, それを纏め上げることにより, $SO(2m+n) \supset SO(2m) \times SO(n)$ の分岐則を得ることを目指したが, 例えば $SO(2) \times SO(2)$ の表現の集まり (つまりは $SO(4)$ の重みの集まり) から $SO(4)$ の表現を復元することも $U(2) \supset U(1) \times U(1)$ の場合ほどには易しくないので, どうも使える良い分岐則が得られているとはいえない.

ここではこのような (向き付けられた) 実グラスマン多様体に対応するコンパクト・リー群の組 $SO(m+n) \supset SO(m) \times SO(n)$ の分岐則の有り様を探るべく, $SO(n+3) \supset SO(3) \times SO(n)$ の場合を考えてみた.

§2 Weyl's character formula.

連結なコンパクト・リー群 G の極大トーラス群 T に作用を制限すると, G-module V_G は 1 次元づつの T-modules に分解し, それぞれへの T の作用は, T のリー環 $\mathfrak{t}$ の dual $\mathfrak{t}^*$ の元 λ で定まり, それを重み (weight) と呼ぶ. V_G の全ての重み λ についての e^λ の和 $\sum_\lambda m_\lambda e^\lambda$ を V_G の指標 χ_G と呼ぶ. 重みの空間には辞書式の順序が入り, 既約 G-module V_G にはその順序で最大の重みが唯一つあり, それを Λ とすると, それで既約 G-module が (同型を除いて) 定まる. Λ を最大重みとして持つ G-module の指標を $\chi_G(\Lambda)$ とする.

組 (G,T) から定まるワイル群 W_G $(= N(T)/Z(T))$ の $\mathfrak{t}^*$ への作用を用いて, 重み λ に対する交代指標 $\xi_G(\lambda)$ を $\xi_G(\lambda) = \sum_{w \in W_G} \mathrm{sgn}(w) e^{w \cdot \lambda}$ で定義する. W_G は重みの空間の基底の置換を含んでいたりするので, この符号付きでの各基底の成分の積の和は特別な行列式の一般化のようなものである. 実際多くの場合交代指標は行列式を用いて表されもする. G のリー環 $\mathfrak{g}$ を Adjoint action で G-module と考えた時の重み, 即ち G の roots, の全体を Δ_G とする. 辞書式順序について 0 よりも大きい roots の全体を Δ_G^+ とし, $\delta_G = (1/2)\sum_{\alpha \in \Delta_G^+} \alpha$ とおくと, 次が成立する.

$$\chi_G(\Lambda)\, \xi_G(\delta_G) = \xi_G(\Lambda + \delta_G).$$

これが Weyl の指標公式 (character formula) である. 更に,

$$\xi_G(\delta_G) = \prod_{\alpha\in\Delta_G^+}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$$

となることも知られている.

K の極大トーラス群 T' を含むように G の極大トーラス群 T を取っておけば, G-module V_G の指標 χ_G と, 作用を K に制限して K-module と考えた時の指標 χ_K とは, 簡単な関係 $\chi_G|_{\mathfrak{t}'} = \chi_K$ で結ばれている. 即ち, T' のリー環 $\mathfrak{t}'$ に $\mathfrak{t}^*$ の元を制限して $\mathfrak{t}'^*$ の元と読み替えれば良い. Λ_G を最大重みとして持つ既約 G-module が Λ_K らを最大重みとして持つ既約 K-modules の直和に分解するなら, $\sum_{\Lambda_K}\chi_K(\Lambda_K) = \chi_G(\Lambda_G)|_{\mathfrak{t}'}$ である. 両辺で Weyl の指標公式を使うと次のようになる.

$$\sum_{\Lambda_K}\xi_K(\Lambda_K+\delta_K) = \left.\frac{\xi_G(\Lambda_G+\delta_G)}{\prod_{\alpha\in\Delta_G^+\setminus\Delta_K^+}(\exp(\alpha/2)-\exp(-\alpha/2))}\right|_{\mathfrak{t}'}.$$

既約 K-modules の直和への分解は一意的であるので, 右辺を計算して左辺の形にできれば, そこから分岐則が読み取れる. 要は「行列式」を変形して分母で割り算できるようにし, その結果を纏め上げることである.

§3 結果.

(a) $SO(2n+3) \supset SO(3)\times SO(2n)$ の場合.

通常の行列群としての $G = SO(2n+3)$ の極大トーラス群 T は $n+1$ 個の $SO(2)$ の直積であり, 対角線に沿って右下詰めで取っておくことにする. 重みの空間の基底を左上から順に λ_0, λ_1, ..., λ_n が対応するように取り, その順での辞書式順序を入れる. 既約 G-module の最大重み Λ_G は $h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \cdots + h_n\lambda_n$ と書ける. 但し, h_0, h_1, ..., h_n は非負整数で, $h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_n$ を満たすものである. ($Spin$ の表現や, Lie 環の表現を考えるときには非負整数 $+1/2$ の形のものも考える必要があるが, 以下の記述は少し変更すればその場合にも成立する. ここでは省略する.)

さて, 今までずっと複素数体上で考えて来ている. $SO(2n+3)$ については複素既約表現は全て実既約表現の複素化になっている. 作用を $K = SO(3)\times SO(2n)$ に制限すると, 実既約表現の直和の複素化になる. $SO(2n)$ の実既約表現には複素化すると共役な複素既約表現の直和になるものがある. それは常に組で理解しておく方が分かりやすいので, その共役な複素既約表現の組を一つの最大重み Λ_K で表すことにする. K の極大トーラス群としては同じ T をとれば良いから, 重みの空間の基底も同じにとる. すると実既約表現の複素化の既約 G-module や共役な既約 G-modules の組の最大重みは $p_0\lambda_0+p_1\lambda_1+\cdots+p_n\lambda_n$ と書ける. 但し, p_0, p_1, ..., p_n は非負整数で, $p_1 \geq \cdots \geq p_n$ を満たすものである. ($p_n > 0$ なるものが共役な既約 G-modules の組に対応する.)

Λ_K に対応する $SO(3)\times SO(2n)$-module (の組) が Λ_G を最高重みとして持つ既約 $SO(2n+3)$-module の分岐中に含まれる為の必要十分条件は:

1. $p_n \leq h_{n-1}$, $p_{n-1} \leq h_{n-2}$, $h_{i+2} \leq p_i \leq h_{i-1}$ $(1 \leq i \leq n-2)$.

2.

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)} \frac{\prod_{i=0}^n s(l_i\lambda_0)}{(s(\lambda_0))^n} = \sum_p m_p\, s((p+\frac{1}{2})\lambda_0) \qquad (*)$$

としたとき, m_{p_0} が 0 でない.

を満たすことである. 但し, $\sum_{(k_1,\ldots,k_n)}$ は

a. $k_1, \ldots, k_n$ は非負整数で, $k_1 \geq \cdots \geq k_n$,

b. $p_n \leq k_n \leq \min(p_{n-1}, h_{n-1})$, $\max(p_i, h_{i+1}) \leq k_i \leq \min(p_{i-1}, h_{i-1})$ $(1 \leq i \leq n-1)$,

を満たすものについての和であり,

$$\begin{aligned} l_0 &= h_0 - \max(h_1, k_1) + 1, \\ l_i &= \min(h_i, k_i) - \max(h_{i+1}, k_{i+1}) + 1 \qquad (1 \leq i \leq n-1), \\ l_n &= \min(h_n, k_n) + 1/2, \end{aligned}$$

であり, $s(\lambda) = \exp(\lambda) - \exp(-\lambda)$ である. m_{p_0} は同じ表現がいくつ含まれているかという重複度を表している.

(b) $SO(2n+4) \supset SO(3) \times SO(2n+1)$ の場合.

通常の行列群としての $G = SO(2n+4)$ の極大トーラス群 T を対角線に沿って並んだ $n+2$ 個の $SO(2)$ の直積とする. 重みの空間の基底を左上から順に λ_{00}, λ_0, λ_1, $\ldots$, λ_n が対応するように取り, その順での辞書式順序を入れる. 既約 G-module, 又は共役な既約 G-modules の組の最大重み Λ_G は $h_{00}\lambda_{00} + h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \cdots + h_n\lambda_n$ と書ける. 但し, h_{00}, h_0, h_1, $\ldots$, h_n は非負整数で, $h_{00} \geq h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_n$ を満たすものである.

一方, $K = SO(3) \times SO(2n+1)$ の極大トーラス群 T' は左上から二番目の $SO(2)$ を除いた $n+1$ 個の $SO(2)$ の直積であり, その重みの空間の基底は λ_0 を除いたものになる. $\mathfrak{t}'$ へ制限するとは $\lambda_0 = 0$ と置くことに他ならない. 既約 K-module の最大重みは $p_{00}\lambda_{00} + p_1\lambda_1 + \cdots + p_n\lambda_n$ と書ける. 但し, p_{00}, p_1, $\ldots$, p_n は非負整数で, $p_1 \geq \cdots \geq p_n$ を満たすものである.

λ_K を最大重みとして持つ $SO(3) \times SO(2n+1)$-module が λ_G に対応する $SO(2n+4)$-module (の組) の分岐中に含まれる為の必要十分条件は:

1. $p_n \leq h_{n-2}$, $h_{i+1} \leq p_i \leq h_{i-2}$ $(2 \leq i \leq n-1)$, $h_2 \leq p_1 \leq h_{00}$.

2.

$$\sum_{(q_0,q_1,\ldots,q_n)} \frac{\prod_{i=0}^n s(r_i\lambda_{00})}{(s(\lambda_{00}))^n} = \sum_p m_p\, s((p+\frac{1}{2})\lambda_{00}) \qquad (**)$$

としたとき, $m_{p_{00}}$ が 0 でない.

を満たすことである. 但し, $\sum_{(q_0,q_1,\ldots,q_n)}$ は

a. $q_0, q_1, \ldots, q_n$ は非負整数で, $q_0 \geq q_1 \geq \cdots \geq q_n$,

b. $h_n \leq q_n \leq \min(p_{n-1}, h_{n-1})$, $\max(p_{i+1}, h_i) \leq q_i \leq \min(p_{i-1}, h_{i-1})$ $(2 \leq i \leq n-1)$, $\max(p_2, h_1) \leq q_1 \leq h_0$, $\max(p_1, h_0) \leq q_0 \leq h_{00}$,

を満たすものについての和であり,

$$\begin{aligned} r_0 &= q_0 - \max(q_1, p_1) + 1, \\ r_i &= \min(q_i, p_i) - \max(q_{i+1}, p_{i+1}) + 1 \qquad (1 \le i \le n-1), \\ r_n &= \min(q_n, p_n) + 1/2, \end{aligned}$$

である. やはり $m_{p_{00}}$ は同じ表現がいくつ含まれているかという重複度を表している.

§4 結果の評価.

どちらの場合でも 2. の条件の $(*)$ や $(**)$ の式の左辺が簡単に右辺の形の和として書かれるか, m_{p_0} や $m_{p_{00}}$ が計算できるかということが問題となる.

与える K-module が小さい場合, つまり, $p_0 = p_1 = \cdots = p_n = 0$ とか $p_{00} = p_0 = \cdots = p_n = 0$ という自明な表現に近い場合にはこれらの分岐則は使える. 足し合わせでの条件を満たす k_i の組や q_i の組の数が小さいからだ. 大きくなるとちょっと実用的ではなさそうだ. 実グラスマン多様体の forms の spectra を計算して見せれば, どの程度実用的であるか, ないか, の判断材料になるだろうけれども…….

stability についていうと, それは, h_n, ..., h_3 を固定して, h_2, h_1, h_0 を $h_3 \ll h_2 \ll h_1 \ll h_0$ となるように動かすとどうなるか, 或いは, h_n, ..., h_2 を固定して, h_1, h_0, h_{00} を $h_2 \ll h_1 \ll h_0 \ll h_{00}$ となるように動かすとどうなるか, を考えることになる. 面白い問題だと思うし, 何とか使えそうな気もするが, 未だ出来ていない.

もう少し $(*)$ や $(**)$ の左辺を纏め上げる方法を見つけないといけないようだ.

[1] Lepowsky, J.: Representations of semisimple Lie groups and an enveloping algebra decomposition, Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1970).

[2] Lepowsky, J.: Multiplicity formula for certain semisimple Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 601–603.

[3] Mashimo, K.: Spectra of the Laplacian on the cayley projective plane, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 367–396.

[4] Mashimo, K.: On the branching theorem of the pair $(F_4, Spin(9))$, preprint.

[5] Tsukamoto, C.: Spectra of Laplace-Beltrami operators on $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$ and $Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$, Osaka J. Math. **18** (1981), 407–426.

mailto: chiaki@kit.ac.jp