シンプレクティック等質空間と非コンパクト単純リー群*

坊向 伸隆

大阪市立大学 数学研究所 COE 研究所員

1　目的.

この報告書は, 推移的に作用する群 G が非コンパクト連結実半単純 かつ そのイソトロピー部分群 H がコンパクトなるシンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) の構造を解明することを目的としている.

2　準備.

シンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) とは, 1974 年に Bon-Yao Chu 氏 (cf. [2]) により提唱された概念であり その定義は次で与えられる:

定義 2.1 .　(G, H, Ω) が**シンプレクティック等質空間**であるとは,
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

(1) G: 連結実リー群;

(2) H: G の閉連結部分群;

(3) Ω: 等質空間 G/H 上の G-不変なシンプレクティック形式.

* This report is supported by the 21 COE program “Constitution of wide-angle mathematical basis focused on knots.”

注意 2.1 ． この報告書では, 0-次元多様体もシンプレクティック等質空間とみなす．また, 全てのリー群 G は有限次元とする．そして, 第 3 章では G の中心は有限であると仮定する．

まず命題 2.1 を与える．

命題 2.1 ． G が半単純なるシンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) に対して, 次を満たす一意的な元 $Z \in \mathfrak{g}$ が存在する:

$$\big(G, H, \Omega\big) = \big(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z\big).$$

ただし, $C_G(Z)_0$ は Z の G における中心化群 $C_G(Z) = \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}(g)Z = Z\}$ の単位連結成分を表す．

ここで, Ω_Z は, 原点 $o = \pi(e)$ において,

$$(\Omega_Z)_o(u, v) := B_{\mathfrak{g}}(Z, [X, Y])$$

for $u = \pi_{*e}X_e, v = \pi_{*e}Y_e \in T_o\big(G/C_G(Z)_0\big)$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ と定義されている．ただし, π は G から $G/C_G(Z)_0$ の上への射影を表し, $B_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ のキリング形式を表す．

この命題 2.1 から次のことが分かる: 連結実半単純リー群 G を一つ固定し シンプレクティック等質空間 $\big(G, H, \Omega\big) = \big(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z\big)$ $(\exists 1 Z \in \mathfrak{g})$ を考察する際, 等質空間 $G/H = G/C_G(Z)_0$ の性質〔e.g. H がコンパクト, G/H は擬ケーラー等質空間, etc.〕により元 Z の性質〔e.g. Z は楕円元, Z は半単純元, etc.〕が定まっていると考えられる．逆に, Z の性質により $G/H = G/C_G(Z)_0$ の性質が定まっているとも考えられる．

3 結果.

非コンパクト連結実半単純リー群 G を一つ固定する．第 2 章の考察の下, シンプレクティック等質空間 $\big(G, H, \Omega\big) = \big(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z\big)$ $(\exists 1 Z \in \mathfrak{g})$ に対して, 「$H = C_G(Z)_0$ がコンパクトならば, Z はどの様な性質をもつ

のか ?」また逆に,「Z がどの様な性質をもてば $H = C_G(Z)_0$ はコンパクトになるのか ?」を考察する.

$H = C_G(Z)_0$ がコンパクトであると仮定する. G は連結半単純リー群より, H を含む G の極大コンパクト部分群 K が存在する. 更に, $\mathfrak{k}$ を K のリー代数とし $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \,|\, B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0 \text{ for all } Y \in \mathfrak{k}\}$ とおくと, $\mathfrak{g}$ のカルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を得ることが出来る. $H = C_G(Z)_0$ のリー代数 $\mathfrak{h}$ は $\{X \in \mathfrak{g} \,|\, [Z, X] = 0\}$ であるので, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ と $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ より, Z は次の性質をもつことが分かる:

(a) $Z \in \mathfrak{k}$;

(b) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} Z|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ 線形同型.

注意 3.1 . G は非コンパクトなので $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ であることに注意する.

逆に, 元 Z が次の性質 (a), (b) をもつと仮定する:

(a) $Z \in \mathfrak{k}'$;

(b) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} Z|_{\mathfrak{p}'} : \mathfrak{p}' \longrightarrow \mathfrak{p}'$ 線形同型.

ただし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン分解.

G は連結半単純リー群なので, $\mathfrak{k}'$ をリー代数にもつ G の極大コンパクト部分群 K' が存在し, $K' \times \mathfrak{p}'$ と G は写像 $(k', X') \mapsto k' \cdot \exp X'$ により微分同型となる. そのことから, (a) と (b) より, $C_G(Z)_0 = C_G(Z) = C_{K'}(Z)$ となり $H = C_G(Z)_0$ はコンパクトとなる.

以上により,「G が非コンパクト半単純なるシンプレクティック等質空間 $\big(G, H, \Omega\big) = \big(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z\big)$ に対して, $H = C_G(Z)_0$ がコンパクトであるならば Z は (a), (b) を満たす. そして, 逆も成立する」ことが分かる.

4 余談.

非コンパクト実半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ を一つ固定する. そのカルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対して, (a), (b) を満たす元全体からなる $\mathfrak{g}$ の部分集合を

$\mathrm{AB}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}}$ とする, i.e. $\mathrm{AB}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}} := \left\{ Z \in \mathfrak{k} \,\middle|\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} Z|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p} \text{ 線形同型} \right\}$. また, 別のカルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$ に対しても同様に $\mathrm{AB}_{\mathfrak{k}'\oplus\mathfrak{p}'}$ を定義しておく. このとき, 次を満たす $\mathfrak{g}$ の内部自己同型写像 ψ が存在する:

$$\psi(\mathrm{AB}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}}) = \mathrm{AB}_{\mathfrak{k}'\oplus\mathfrak{p}'}.$$

このことから, $\mathrm{AB}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{g}$ を特徴付ける集合である. 例えば, $\mathrm{AB}_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}} \neq \emptyset$ ならば, $\mathrm{rank}(\mathfrak{g}) = \mathrm{rank}(\mathfrak{k})$ となり, $\mathfrak{g}$ は次のいずれのリー代数とも同型にならない: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ with $n \geq 3$, $\mathfrak{su}^*(2n) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$ with $n \geq 2$, $\mathfrak{so}(2i+1, 2n-2i-1)$ with $n \geq 4$ and $0 \leq i \leq n-1$, $\mathfrak{e}_{6(6)}$, $\mathfrak{e}_{6(-26)}$, $(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 2$, $(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 2$, $(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 3$, $(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 4$, $({\mathfrak{g}_2}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $({\mathfrak{f}_4}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $({\mathfrak{e}_6}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $({\mathfrak{e}_7}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $({\mathfrak{e}_8}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$.

参考文献

[1] N. Boumuki, *Local symplectic homogeneous spaces, and compact semi-simple Lie groups* (preprint).

[2] B.-Y. Chu, *Symplectic homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **197**(1974), 145–159.

[3] J. Dorfmeister and Z.-D. Guan, *Fine structure of reductive pseudo-Kählerian spaces*, Geom. Dedicata **39**(1991), 321–338.

[4] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[5] 金行壮二, アフィン対称空間入門, 部分多様体・湯沢 2003 研究会記録集, (2004), 3–34.

[6] S. Sternberg, *Symplectic homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **212**(1975), 113–130.