平均曲率一定回転超曲面に関する Hsiang -Yu の定理の別証明

東北大学名誉教授　　劔持 勝衛

1　序

３次元ユークリッド空間内の平均曲率一定回転面について, プラトー (Plateau) は実験により（１）平面,（２）懸垂面 (この二つは平均曲率が恒等的にゼロな場合),（３）球面,（４）円柱面,（５）アンデュロイド,（６）ノドイドがあることを確かめていた.　これら６種類の曲面しかないことの数学的証明は 1841 年にフランスの数学者デローネー (Delaunay) により成され,　更に彼はこれら回転面の幾何学的構成法をも発見した.　実際,　ある円錐曲線（例えば,　楕円）を考えそれを平面内の固定した直線上を滑らすことなく転がす.　そのとき楕円の焦点が描く曲線をその直線の周りに回転させてできる曲面は平均曲率一定である [1].　この構成法からわかるように平均曲率がゼロでない定数のときに限って平均曲率一定回転面は周期的である.　Hsiang と Yu [2] はこの Delaunay の結果を高次元へ拡張することにより,　定理「n 次元ユークリッド空間 R^n 内の $SO(n-1)$ 型の平均曲率一定 ($\neq 0$) 回転超曲面は周期的である」を得た. 彼らの証明方法は Delaunay のそれを高次元へ拡張したもので具体的であるが,　周期性の証明という観点からすると直接的でない.　すなわち,　回転超曲面の生成曲線をまず他の曲線に対応させ,　その曲線の性質を調べてから目当ての生成曲線の周期性を証明している.

本講演では,　生成曲線の微分方程式そのものをしらべて上記 Hsiang と Yu の定理を示す.　この証明は周期的回転面について Dorfmeister と行っている共同研究から得られたものである.

2　生成曲線

M を R^n 内の超曲面とする.　このとき,

定義 1 M が $SO(n-1)$ 型の**一般化された回転超曲面**とは M が R^n の超平面 R^{n-1} に作用している等長的変換群 $SO(n-1)$ で不変であるときをいう. 以後,　本講演ではこれを回転超曲面と呼ぶ.

R^{n-1} と直交する直線を回転軸と呼び,　その座標を x で表す.　M のパラメーター表示を得るには,　$R^n = \{x\} \oplus R^{n-1}$ と直交直和分解するとき,　任意の $\alpha \in SO(n-1)$ に対し,　α は R^{n-1} の各元を列ベクトルと見て通常の行列の積で左から作用する.　よって R^{n-1} の元を $(y, 0, ..., 0)^t$ とおくとき,　回転超曲面 M は生成曲線 $\Gamma = (x(s), y(s))$ で定まる,　ここで s は Γ の弧長パラメーターである.

M の平均曲率は s のみの関数となるので,　それを $H(s)$ と書く.　$H(s)$ は次式を満たす：

$$\begin{cases} y(s)(x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s)) + (n-2)x'(s) - (n-1)H(s)y(s) = 0, \\ x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1, \quad y(s) > 0, \quad s \in I, \end{cases} \tag{1}$$

ここで，　I は Γ の定義域である．よって，　生成曲線 Γ は平均曲率 $H(s)$ と初期条件 $y(0), y'(0)$ で定まる．

定義 2 M の生成曲線が $\boldsymbol{R}$ 上定義されているとする．　このとき，M が**周期的**であるとはある実数 L が存在して $y(s+L) = y(s),\ s \in \boldsymbol{R},$ が成立すること．

つまり，　M は回転軸に平行に L だけ平行移動する R^3 の等長変換群で不変である．　$n = 3$ のとき，　アンヂュロイドやノドイドは周期的である [1]. Hsiang -Yu はこれを高次元化した [2].

定理 1 n は任意の自然数 (≥ 3) とし，　$H(s) = constant \neq 0$ と仮定する．　そのとき，　(1) で定義される回転超曲面 M は周期的である．

Hsiang -Yu の証明方法は Delaunay のそれを拡張したもので，　いわゆる"rolling construction"の一般化である．本講演ではそれとは異なる証明を与える．

証明　$H(s)$ の不定積分から定義される関数

$$\eta(s) = (n-1)\int_0^s H(t)dt$$

を導入する．　そして，

$$y'(s) + ix'(s) = e^{i(\eta(s)+\theta(s))}, \quad (i^2 = -1)$$

によって新しい未知関数 $\theta(s)$ を導入する．　そのとき連立方程式 (1) は

$$\begin{cases} y' - \cos(\eta + \theta) = 0 \\ y\theta' + (n-2)\sin(\eta+\theta) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

と変換される．我々の目的は「仮定: $H(s) = const \neq 0$ のもとで，主張: $y(s)$ が周期関数」を示すことだがまず上の式から y を消去して θ に関する微分方程式を求めてその性質をしらべる．　そのために新しい関数 $\nu(s)$ を

$$\nu(s) = \left(\frac{n-1}{n-2}\theta'(s) + \eta'(s)\right)^{-\frac{1}{n-1}} \tag{3}$$

として定義する．　このとき $\nu(s)$ は 2 階の微分方程式

$$\begin{aligned} \nu'' - \frac{1}{(n-1)^2}\nu\left(-\eta' + \frac{1}{n-1}\nu^{-(n-1)}\right)\left(\eta' + (n-2)\nu^{-(n-1)}\right) & \qquad (4) \\ +\frac{\nu''}{n-1}\left(\frac{\eta''^2}{n-1}\nu^{n-1} + \eta''' + (n+1)\eta''\nu^{-1}\nu'\right) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす．　ここで定理の仮定：$H(s) = const = h > 0$ を使うと (4) 式は

$$\nu'' + \frac{n-3}{n-2}h\nu^{-n+2} - \frac{1}{n-2}\nu^{-2n+3} + h^2\nu = 0 \tag{5}$$

となる．　初等微分方程式論によればこの形の微分方程式は必ず積分できる．　実際，$p(s) = \nu'(s)$ とおいて (5) を積分すると

$$p^2 + \left(\frac{1}{n-2}\nu^{-(n-2)} - h\nu\right)^2 = const = d > 0 \tag{6}$$

を得る．(6) により曲線 $(\nu(s), p(s))$ は (ν, p) -平面で単純閉曲線を描く．　よって $\nu(s)$ は周期的である，　従って (3) より $\theta'(s)$ も周期的である．　これらの事実から $y(s)$ も周期的になることが確かめられる．　周期 L は曲線 $(\nu(s), p(s))$ の長さである．　**証明終**

参考文献

[1] C. Delaunay, Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pures. Appl. Ser.* 1, 6(1841), 309-320.

[2] W. Y. Hsiang and W. C. Yu, A generalization of a Theorem of Delaunay, *J. Differential Geom.* 16(1981), 161-177.

[3] K. Kenmotsu, Surfaces of revolution with periodic mean curvature, *Osaka J. of Math.* 40(2003), 687-696.

劍持 勝衛 (Katsuei Kenmotsu)
kenmotsu@math.tohoku.ac.jp
981-3122　仙台市泉区加茂　2-9-3