複素等焦部分多様体と Hermann 型作用

小池直之 (東京理科大)

1. イントロダクション

M を対称空間 G/K 内のはめ込まれた部分多様体とする。次の 2 条件が成り立つとき、M は等焦部分多様体とよばれる：

(E-i) M の法ホロノミー群が自明で、かつ、法バンドルがアーベル的である。
(E-ii) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde{v}$ に対し、$\gamma_{\tilde{v}_x}$ $(x \in M)$ に沿うフォーカル半径らが x によらず (つまり、M 上で) 一定である。ただし、$\gamma_{\tilde{v}_x}$ は $\dot{\gamma}_{\tilde{v}_x}(0) = \tilde{v}_x$ となる法測地線を表す。

この概念は 1995 年に C.L. Terng と G. Thorbergsson([TeTh1]) によって定義された。一般に、完備な負曲率多様体内の部分多様体の形作用素の 0 に近い各固有値に対しては、それに対応すべきフォーカル点が無限の彼方へ消えてしまう、つまり、対応すべきフォーカル半径が実数の範囲では実在しない。このような理由から、非コンパクト型対称空間内の部分多様体に対しては、等焦性は (主曲率ではなく) フォーカル半径を用いて定義されるので、性質として弱すぎる。そこで、筆者はより一般に複素フォーカル半径という概念を導入し、その概念を用いて複素等焦部分多様体およびそのサブクラスとしてプロパー複素等焦部分多様体というクラスを導入した ([K1])。複素フォーカル半径はそれに対応すべきフォーカル点が実在しないので仮想的な概念であった。その後、[K2] において複素フォーカル半径の幾何的実質を掴むために、非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備かつ実解析的な部分多様体 M の外在的複素化 $M^{\mathbf{c}}$ をアンチケーラー対称空間とよばれる空間 $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内の複素部分多様体として定義し、M の複素フォーカル半径を $M^{\mathbf{c}}$ のフォーカル点の位置を示唆する量として捕らえることができた ([K2])。ここで、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ は G/K とそのコンパクト双対 G^*/K の双方を含み、その双方の世界をながめることのできる包括的空間であることを注意しておく。一方、$G^{\mathbf{c}}$ に対し、parallel transport 写像 $\phi^{\mathbf{c}}$ を、自明な $G^{\mathbf{c}}$-バンドル $[0,1] \times G^{\mathbf{c}}$ のある種の接続の空間 $H^0([0,1], \mathfrak{g}^{\mathbf{c}}))$(これは無限次元アンチケーラー空間になる) から $G^{\mathbf{c}}$ へのあるアンチケーラーサブマージョンとして定義し、また、無限次元アンチケーラー空間内でアンチケーラー等径部分多様体およびプロパーアンチケーラー等径部分多様体という概念を導入した。$\pi^{\mathbf{c}} : G^{\mathbf{c}} \to G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ を自然な射影として、次の事実が成り立つ。

定理 A([K2]) M を非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の法ホロノミー群が自明で法バンドルがアーベル的な完備かつ実解析的部

分多様体とする。このとき、M が複素等焦であることと $(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ の各連結成分がアンチケーラー等径的であることは同値である。

このように、非コンパクト型対称空間内の完備かつ実解析的な複素等焦部分多様体の研究は、無限次元アンチケーラー等径部分多様体の研究に還元される。ところで、プロパーアンチケーラー等径部分多様体 M について、次の事実が示される:

- (M, x) (x : M の任意の点) のフォーカル点の全体は、無限に多くの複素超平面の和になる。

この事実の下に、プロパーアンチケーラー等径部分多様体に付随して複素 reflection 群を、その任意の点における法空間内のフォーカル集合を構成する複素超平面らに関する位数 2 の複素 reflection らから生成される Coxeter 群として定義し、それをその部分多様体に付随する複素 Coxeter 群と呼んだ ([K4])。この群は離散群であることが示される。

この群に関して次の分解定理が示される。

定理 B([K4]) 無限次元アンチケーラー空間内のプロパーアンチケーラー等径部分多様体が 2 つのプロパーアンチケーラー等径部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、その部分多様体に付随する複素 Coxeter 群が分解可能であることは同値である。

また、プロパー複素等焦部分多様体に対しても、それに付随する複素 Coxeter 群が定義され、定理 B を用いて次の事実が示される。

定理 C([K4]) 非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備かつ実解析的なプロパー複素等焦部分多様体が 2 つのプロパー複素等焦部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、その部分多様体に付随する複素 Coxeter 群が分解可能であることは同値である。

複素等焦部分多様体のクラスにおいて、プロパー複素等焦部分多様体がどの程度占めるのかを調べることは重要である。これに関して、次の結果が得られる。

定理 D([K3]) 非コンパクト型対称空間 G/K 上の Hermann 型作用 (つまり、G の対称部分群の作用) の主軌道は、curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体である。

ここで、部分多様体 M が curvature adapted であるとは、その各法ベクトル v に対し、$R(\cdot, v)v$ が M の接空間を保ち、形作用素 A_v と可換であることを意味する。ただし、R は G/K の曲率テンソルを表す。この概念は 1993 年に J. Berndt と L. Vanhecke によって定義された。既約コンパクト型対称空間内の余次元 2 以上の完備かつ連結な等焦部分多様体はすべて Hermann 作用の主軌道として捕らえられることが知られている ([HPTT],[C],[Kol])。この事実と定理 D の事実からプロパー複素等焦部分多様体のクラスは複素等焦部分多様体のクラスをかなりの程度占めていると推測される。

curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体に付随する複素 Coxeter 群に関して、次の事実が示される。

定理 E([K5]) M を非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備，実解析的かつ curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体とし、$\triangle$ を $g_*^{-1}T^{\perp}_{gK}M$ (gK : M の任意の点) を含む極大アーベル部分空間に関するルート系とし、$\overline{\triangle} := \{\alpha|_{g_*^{-1}T^{\perp}_{gK}M} \,|\, \alpha \in \triangle \text{ s.t. } \alpha|_{g_*^{-1}T^{\perp}_{gK}M} \neq 0\}$ とする。このとき、M に付随する複素 Coxeter 群は、$\overline{\triangle} \times \mathbf{Z}^r$ ($r := \mathrm{codim}\, M$) をアフィンルート系としてもつアフィン Weyl 群に同型である。

定理 C,E を用いて、次の事実が示される。

系 M を非コンパクト型対称空間 G/K(G は忠実な実表現をもつものとする) 内の完備，実解析的かつ curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体とし、$\overline{\triangle}$ を定理 E におけるようなルート系とする。このとき、M が 2 つの curvature adapted なプロパー複素等焦部分多様体の (外在的) 直積に分解されることと、$\overline{\triangle}$ をルート系としてもつ Weyl 群が分解可能であることは同値である。

2. 複素等焦部分多様体

v を M の点 $x = gK$ における法ベクトルとし、γ_v を $\gamma_v'(0) = v$ を満たす法測地線とする。γ_v に沿うヤコビ場 Y で、$Y(0) = X\, (\in T_xM),\ Y'(0) = -A_vX$ を満たすものは

$$Y(s) = (P_{\gamma_v|_{[0,s]}} \circ (D^{co}_{sv} - sD^{si}_{sv} \circ A_v))(X)$$

によって与えられる。ここに、$Y'(0) = \widetilde{\nabla}_vY,\ (\widetilde{\nabla}$: G/K のリーマン接続) であり、$P_{\gamma_v|_{[0,s]}}$ は $\gamma_v|_{[0,s]}$ に沿う平行移動を表し、また、$D^{co}_{sv},\ D^{si}_{sv}$ は各々次式によって定義される T_xM の線形変換である。

$$D^{co}_{sv} = g_* \circ \cos(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v)) \circ g_*^{-1} \qquad D^{si}_{sv} = g_* \circ \frac{\sin(\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v))}{\sqrt{-1}\mathrm{ad}(sg_*^{-1}v)} \circ g_*^{-1}$$

$$(\mathrm{ad} : \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G \text{ の随伴表現})$$

このように、γ_v に沿うフォーカル半径は $\mathrm{Ker}(D^{co}_{sv} - sD^{si}_{sv} \circ A_v) \neq \{0\}$ となる実数 s として捕らえられる。G/K が非コンパクト型の場合、より一般に $\mathrm{Ker}(D^{co}_{zv} - zD^{si}_{zv} \circ A^{\mathbf{c}}_v) \neq \{0\}$ となる複素数 z を幾何学的量として取り扱うべきであると考えるのは自然であり、その量を γ_v に沿う複素フォーカル半径と名づけた。ここに、$D^{co}_{zv},\ D^{si}_{zv}$ および $A^{\mathbf{c}}_v$ は、各々、$(g_* \circ \cos(\sqrt{-1}\mathrm{ad}^{\mathbf{c}}(zg_*^{-1}v)) \circ g_*^{-1})|_{(T_xM)^{\mathbf{c}}}$ $(: (T_xM)^{\mathbf{c}} \to (T_xG/K)^{\mathbf{c}})$, $(g_* \circ \frac{\sin(\sqrt{-1}\mathrm{ad}^{\mathbf{c}}(zg_*^{-1}v))}{\sqrt{-1}\mathrm{ad}^{\mathbf{c}}(zg_*^{-1}v)} \circ g_*^{-1})|_{(T_xM)^{\mathbf{c}}}$ $(: (T_xM)^{\mathbf{c}} \to (T_xG/K)^{\mathbf{c}})$ および A_v の複素化を表す。

(注) G/K がコンパクト型のとき、同様に複素フォーカル半径を定義しても結局すべて実数となってしまい、フォーカル半径以外の新しいものは出てこない。

$(\mathfrak{g},\sigma)$ を非コンパクト型対称空間 G/K の直交対称リー代数とし、$\mathfrak{p}:=\mathrm{Ker}(\sigma+\mathrm{id})$, $\mathfrak{k}:=\mathrm{Ker}(\sigma-\mathrm{id})$ とする。$\mathfrak{p}$ は、$T_{eK}G/K$ と同一視される。また、$\mathfrak{p}=\mathfrak{a}+\sum_{\alpha\in\triangle_+}\mathfrak{p}_\alpha$ を、v を含むある極大アーベル部分空間 $\mathfrak{a}$ に関するルート空間分解とする。このとき、次の事実が成り立つ。

命題 2.1([K1]) $A_vX=\lambda X$ $(v\in T^\perp_{gK}M)$ かつ $g_*^{-1}X\in\mathfrak{p}_\alpha$ となる $X(\neq 0)\in T_{gK}M$ が存在するとする。このとき、次の (i) $\sim$ (iii) が成り立つ。

(i) $|\lambda|>|\alpha(g_*^{-1}v)|=0$ ならば、$\frac{1}{\lambda}$ は γ_v に沿うフォーカル半径である。$g_*^{-1}X\in\mathfrak{a}$ の場合にも、同様のことが言える。

(ii) $|\lambda|>|\alpha(g_*^{-1}v)|>0$ ならば、$\frac{1}{\alpha(g_*^{-1}v)}(\mathrm{arctanh}\frac{\alpha(g_*^{-1}v)}{\lambda}+j\pi\sqrt{-1})$ $(j\in\mathbf{Z})$ は γ_v に沿う複素フォーカル半径である。

(iii) $|\lambda|<|\alpha(g_*^{-1}v)|$ ならば、$\frac{1}{\alpha(g_*^{-1}v)}(\mathrm{arctanh}\frac{\lambda}{\alpha(g_*^{-1}v)}+(j+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1})$ $(j\in\mathbf{Z})$ は γ_v に沿う複素フォーカル半径である。

複素フォーカル半径を用いて複素等焦部分多様体を次のように定義した。非コンパクト型対称空間内の部分多様体が複素等焦部分多様体であるとは、前述の条件 (E-i) と次の条件 (C) が成り立つことである：

(C) M の各平行単位法ベクトル場 $\tilde v$ に対し、法測地線 $\gamma_{\tilde v_x}(x\in M)$ に沿う複素フォーカル半径らが x によらず (つまり、M 上で) 一定である。

M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の複素等焦部分多様体, $\phi:H^0([0,1],\mathfrak{g})\to G$ を G に対する parallel transport 写像, $\pi:G\to G/K$ を自然な射影とする。$\widetilde{M}:=(\pi\circ\phi)^{-1}(M)$ の各単位法ベクトル v に対し、v 方向の形作用素 A_v の複素化 $A_v^{\mathbf{c}}(:(T_x\widetilde{M})^{\mathbf{c}}\to(T_x\widetilde{M})^{\mathbf{c}})$ $(x:v$ の基点$)$ の固有ベクトルからなる $(T_x\widetilde{M})^{\mathbf{c}}$ の擬正規直交基底が存在するとき、M をプロパー複素等焦部分多様体とよぶ (擬正規直交基底の定義については [K1] を参照のこと)。

3. 非コンパクト型対称空間内の部分多様体の外在的複素化

$(M,\langle\ ,\ \rangle)$ を (有限次元) 擬リーマン多様体とし、J を M の概複素構造とする。J が次の 2 条件を満たすとき、$(M,\langle\ ,\ \rangle,J)$ をアンチケーラー多様体と呼ぶ。

(i) $\langle JX,JY\rangle=-\langle X,Y\rangle$ $(\forall X,Y\in TM)$

(ii) $\nabla J=0$ (∇ : $\langle\ ,\ \rangle$ のレビ · チビタ接続)

このとき、J は積分可能、つまり、複素構造になることを注意しておく。f をアンチケーラー多様体 $(M,\langle\ ,\ \rangle,J)$ からアンチケーラー多様体 $(N,\langle\ ,\ \rangle,\widetilde{J})$ への正則等長はめ込みとする。このとき、f をアンチケーラーはめ込みと呼び、$(M,\langle\ ,\ \rangle,J)$ を $(N,\langle\ ,\ \rangle,\widetilde{J})$ 内のアンチケーラー部分多様体と呼ぶ。

G/K を非コンパクト型対称空間 (ただし、G は連結で忠実な実表現をもつ、それゆえ、複素化 $G^{\mathbf{c}}$ をもつものとする), $\mathfrak{g}$ を G のリー代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ をカルタン分解, $\mathfrak{g}^{\mathbf{c}},\mathfrak{k}^{\mathbf{c}},\mathfrak{p}^{\mathbf{c}},K^{\mathbf{c}}$ を各々、$\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{p},K$ の複素化とする。G/K のリーマン計量を誘導する $\mathfrak{g}$

の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積から決まる $\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$ の対称複素双線形形式の実部の 2 倍を考え、これを $\langle\ ,\ \rangle$ と表す。これは $\mathrm{Ad}(G^{\mathbf{c}})$ 不変な非退化対称双線形形式で $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $G^{\mathbf{c}}$-不変な擬リーマン計量を定める。この計量も $\langle\ ,\ \rangle$ で表すことにする。接空間 $T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ は $\mathfrak{p}^{\mathbf{c}}(=\mathfrak{p}+\sqrt{-1}\mathfrak{p})$ と同一視され、$\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ は正定値、$\langle\ ,\ \rangle|_{\sqrt{-1}\mathfrak{p}\times\sqrt{-1}\mathfrak{p}}$ は負定値、$\mathfrak{p}$ と $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ は、$\langle\ ,\ \rangle$ に関して直交している。J を、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $J_{eK^{\mathbf{c}}}(X+\sqrt{-1}Y)=-Y+\sqrt{-1}X$ $(X,Y\in\mathfrak{p})$ を満たす $G^{\mathbf{c}}$-不変な概複素構造とする。$(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}},\langle\ ,\ \rangle,J)$ は、アンチケーラー多様体になる。$\exp_{eK^{\mathbf{c}}}\mathfrak{p}$ と $\exp_{eK^{\mathbf{c}}}\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ は共に全測地的であり、各々、G/K, そのコンパクト双対 G^*/K と同一視される。このように $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ は G/K と G^*/K の双方を $eK^{\mathbf{c}}$ において互いに直交する全測地的部分多様体として含む包括的空間になっている。

次に、[K2] で定義した非コンパクト型対称空間内の完備かつ実解析的な部分多様体の外在的複素化について説明する。最初に、完備かつ実解析的なリーマン多様体の複素化について説明する。M を完備かつ実解析的なリーマン多様体とする。M の接バンドル TM の 0 切断の適当な近傍 U 上で次の条件を満たす複素構造 J_A が一意に決まる ([S])：

M 上の任意の測地線 $\gamma:\mathbf{R}\to M$ に対し、$\gamma_*:T\mathbf{R}=\mathbf{C}\to TM$ の $\gamma_*^{-1}(U)$ への制限が (U,J_A) における正則曲線になる。

U はできるだけ大きくとっておく。(U,J_A) を M の複素化とよび、$M^{\mathbf{c}}$ と表す。M の断面曲率がすべて非負のとき、$U=TM$ となり、それらがすべて $c\,(<0)$ 以上のとき、$U\supset\{X\in TM\,|\,\|X\|<\frac{\pi}{2\sqrt{-c}}\}$ となる。

M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の f によって等長的にはめ込まれた完備かつ実解析的なリーマン部分多様体とする。ここで、G は連結で忠実な実表現をもつ、それゆえ、G の複素化 $G^{\mathbf{c}}$ をもつものとする。f の複素化 $f^{\mathbf{c}}:M^{\mathbf{c}}\hookrightarrow G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ を次のように定義する。まず、実解析的な曲線 $\alpha:\mathbf{R}\to G/K$ の複素化を定義することにする。実解析的な曲線 $W:\mathbf{R}\to T_{eK}(G/K)$ を $\exp_{eK}(W(t))=\alpha(t)$ $(t\in\mathbf{R})$ によって定義する。ここで、$\exp_{eK}$ は G/K の eK における $\exp$ 写像を表す。$W^{\mathbf{c}}:D\to(T_{eK}(G/K))^{\mathbf{c}}(=T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}))$ (D : $\mathbf{R}$ の $\mathbf{C}$ における近傍) を W の正則拡張として α の複素化 $\alpha^{\mathbf{c}}$ を $\alpha^{\mathbf{c}}(z)=\exp_{eK^{\mathbf{c}}}(W^{\mathbf{c}}(z))(z\in D)$ によって定義する。ここで、$\exp_{eK^{\mathbf{c}}}$ は $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の $eK^{\mathbf{c}}$ における $\exp$ 写像を表す。$\exp_{eK^{\mathbf{c}}}$ は正則写像であり、$\alpha^{\mathbf{c}}$ は α の正則拡張であることを注意しておく。この曲線の複素化を用いて f の複素化 $f^{\mathbf{c}}$ を $f^{\mathbf{c}}(X)=(f\circ\gamma_X)^{\mathbf{c}}(\sqrt{-1})$ $(X\in M^{\mathbf{c}})$ によって定義する。ただし、γ_X は、$\dot\gamma_X(0)=X$ となる M における測地線を表し、$M^{\mathbf{c}}$ は必要ならば $M^{\mathbf{c}}$ の各 X に対し、$(f\circ\gamma_X)^{\mathbf{c}}(\sqrt{-1})$ が定義できるように 0-切断のより小さい近傍に縮めておく。さらに必要ならば $M^{\mathbf{c}}$ を 0-切断のより小さい近傍に縮めることにより $f^{\mathbf{c}}$ は正則はめ込みであるとしてよいことがわかる。$M^{\mathbf{c}}$ には、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の擬リーマン計量から $f^{\mathbf{c}}$ によって誘導される計量を与える。このとき、$M^{\mathbf{c}}$ は $f^{\mathbf{c}}$ によってはめ込まれた $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内のアンチケーラー部分多様体になる。この部分多様体を元の部分多様体 M の外在的複

素化と呼ぶ。$M^{\mathbf{c}}$ は完備であるとは限らないことを注意しておく。外在的複素化について、次の事実が成り立つ。

定理 3.1([K6]). $M := \exp_{eK}\{X \in T_{eK}(G/K) \,|\, F_i(X) = 0\,(i = 1, \cdots, r)\}$ とする。ただし、$\{F_i \,|\, i = 1, \cdots, r\}$ は $T_{eK}(G/K)$ 上の実解析的関数の族で M に沿って $\mathrm{grad}\,F_1, \cdots, \mathrm{grad}\,F_r$ が1次独立であるようなものとする。f を M から G/K への包含写像とするとき、その外在的複素化の像 $f^{\mathbf{c}}(M^{\mathbf{c}})$ は $\exp_{eK^{\mathbf{c}}}\{X \in T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}) \,|\, F_i^h(X) = 0\,(i = 1, \cdots, r)\}$ (F_i^h : F_i の最大の正則拡張) に含まれる。ここで、$T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ は $(T_{eK}(G/K))^{\mathbf{c}}$ と同一視される。

例 M が n 次元非コンパクト型対称空間 G/K 内の点 eK を中心とする半径 r の測地的球面のとき、その外在的複素化は $T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ 内の半径 r の複素球面 $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = r^2$ の $\exp_{eK^{\mathbf{c}}}$ による像になる。ただし、$(z_1, \cdots, z_n)$ は $T_{eK^{\mathbf{c}}}(G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}})$ の擬ユークリッド座標系に付随する複素座標系を表す。

M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の f によってはめ込まれた完備かつ実解析的なリーマン部分多様体とし、$f^{\mathbf{c}} : M^{\mathbf{c}} \hookrightarrow G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ をその外在的複素化とする。各 $gK \in M$ に対し、$M^*_{gK} := M^{\mathbf{c}} \cap T_{gK}M$, $f^*_{gK} := f^{\mathbf{c}}|_{M^*_{gK}}$ とおく。このとき、部分多様体 $f^*_{gK} : M^*_{gK} \hookrightarrow G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ を M の gK における双対部分多様体とよぶ。これは元の部分多様体 M のある種の双対物を $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内で捕らえたものと解釈される。像 $f^*_{gK}(M^*_{gK})$ は、$\exp_{gK^{\mathbf{c}}}(J(T_{gK}(G/K)))$ (これはコンパクト双対 G^*/K と同一視される $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内の全測地的部分多様体である) に含まれているとは限らない。ここで、J は $G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ の複素構造を表す。つまり、$G^{\mathbf{c}}/K^{\mathbf{c}}$ 内で捕らえたこの M の双対物は一般には $G^*/K(= \exp_{gK^{\mathbf{c}}}(\sqrt{-1}\mathfrak{p}))$ の中で捕らえることができないわけである。しかし、次の事実が成り立つ。

定理 3.2([K6]). M が全測地的であるならば、$f^*_{gK}(M^*_{gK})$ は $\exp_{gK^{\mathbf{c}}}(J(T_{gK}(G/K)))(= G^*/K)$ に含まれ、かつ、その中で全測地的になる。

4. 定理 B,C の証明の概略

この節において、定理 B,C の証明の概略を述べることにする。

定理 B の証明の概略 M を無限次元アンチケーラー空間 V 内のプロパーアンチケーラー等径部分多様体とし、W を M の点 x_0 における複素 Coxeter 群とする。まず、M が2つのプロパーアンチケーラー等径部分多様体 $M_i \hookrightarrow V_i$ $(i = 1, 2)$ らの外在的直積 $M_1 \times M_2 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 = V$ に合同であるとする。このとき、M と $M_1 \times M_2$ の同一視の下、$T^\perp_{x_0}M = T^\perp_{x_0}M_1 \oplus T^\perp_{x_0}M_2$(直交和) となる。容易に M の x_0 における各複素主曲率法ベクトルは $T^\perp_{x_0}M_1$ と $T^\perp_{x_0}M_2$ のいずれかに含まれることが示される。それゆえ、次の複素 Coxeter 群に関する事実 $(*)$ により、W が分解可能であることが示される。

(*) $T^\perp_{x_0}M$ の互いに直交するアンチケーラー部分空間 P_1 と P_2 で、$P_1 \oplus P_2 = T^\perp_{x_0}M$ を満たし、かつ、x_0 における各複素主曲率法ベクトルが P_1, P_2 のいずれかに含まれるようなものが存在するならば、W は分解可能である。また、その逆も成り立つ。

逆に、W が分解可能であるとする。このとき、上述の事実 (*) により、(*) の主張にけるような $T^\perp_{x_0}M$ のアンチケーラー部分空間 $P_1^{x_0}$, $P_2^{x_0}$ が存在する。M の各点 x でも、同様な $T^\perp_x M$ のアンチケーラー部分空間 P_1^x, P_2^x が存在する。しかも、$P_i := \bigcup_{x\in M} P_i^x$ $(i=1,2)$ が $T^\perp M$ の法接続に関して平行な部分バンドルになるようにとることができることが示される。$V' := \mathrm{Span} \bigcup_{x\in M} T^\perp_x M$, $V_0 := (V')^\perp$, $V_i := \mathrm{Span} \bigcup_{x\in M} P_i^x$ $(i=1,2)$ とする。ここで、V の絶対平行性の下に V の各点における接空間を V と同一視することより、T_xM, P_i^x を V の部分空間とみなしていることを注意しておく。このとき、$V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$(直交和) が示され、さらに $M_i := M \cap V_i$ $(i=1,2)$ として $M_i \hookrightarrow V_i$ $(i=1,2)$ がプロパーアンチケーラー等径部分多様体であること、および、$M \equiv V_0 \times M_1 \times M_2$ が示される。 q.e.d.

次に、定理 C の証明の概略を述べることにする。

定理 C の証明の概略 M を非コンパクト型対称空間 G/K 内の完備かつ実解析的なプロパー複素等焦部分多様体とし、W を M の点 x_0 における複素 Coxeter 群とする。まず、M が 2 つのプロパー複素等焦部分多様体 $M_i \hookrightarrow G_i/K_i$ $(i=1,2)$ らの外在的直積 $M_1 \times M_2 \hookrightarrow G_1/K_1 \times G_2/K_2 = G/K$ に合同であるとする。$\phi^{\mathbf{c}} : H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}) \to G^{\mathbf{c}}$, $\phi_i^{\mathbf{c}} : H^0([0,1],\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}}) \to G_i^{\mathbf{c}}(i=1,2)$ を各々$G^{\mathbf{c}}$, $G_i^{\mathbf{c}}$ に対する parallel transport 写像とし、$\pi : G \to G/K$, $\pi_i : G_i \to G_i/K_i(i=1,2)$ を各々自然な射影とする。このとき、$(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}}) \equiv (\pi_1^{\mathbf{c}} \circ \phi_1^{\mathbf{c}})^{-1}(M_1^{\mathbf{c}}) \times (\pi_2^{\mathbf{c}} \circ \phi_2^{\mathbf{c}})^{-1}(M_2^{\mathbf{c}})$ が示され、それゆえ、定理 B により $(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ の複素 Coxeter 群 $(\cong W)$ は分解可能であることがわかる。逆に、W が分解可能であるとする。W は $(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ の複素 Coxeter 群でもあるので、定理 B の証明によれば、$(\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}})$ はある 2 つのプロパーアンチケーラー等径部分多様体 $\widetilde{M_1} \hookrightarrow V_1$ と $\widetilde{M_2} \hookrightarrow V_2$ の外在的直積上のシリンダー $\widetilde{M_1} \times \widetilde{M_2} \times V_0 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 \oplus V_0 (= H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}))$ に合同である。分解 $H^0([0,1],\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_0$ に対し、$\mathfrak{g}$ の分解 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_0$ で $V_i \subset H^0([0,1],\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}})$ $(i=1,2)$, $H^0([0,1],\mathfrak{g}_0^{\mathbf{c}}) \subset V_0$, $\theta(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$ $(i=0,1,2)$ ($\theta : (G,K)$ の Cartan 対合) となるものをみつけることができる。$\widetilde{M'_i} := (\pi^{\mathbf{c}} \circ \phi^{\mathbf{c}})^{-1}(M^{\mathbf{c}}) \cap H^0([0,1],\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}})$ $(i=1,2)$ とし、$M'_i := (\pi_i^{\mathbf{c}} \circ \phi_i^{\mathbf{c}})(\widetilde{M'_i}) \cap G_i/K_i$ $(i=1,2)$ とする。ここで、$\phi_i^{\mathbf{c}}$ は $G_i^{\mathbf{c}}(:= \exp \mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}})$ に対する parallel transport 写像，$\pi_i^{\mathbf{c}}$ は $G_i^{\mathbf{c}}$ から $G_i^{\mathbf{c}}/K_i^{\mathbf{c}}$ $(K_i^{\mathbf{c}} := \exp \mathrm{Fix}(\theta^{\mathbf{c}}|_{\mathfrak{g}_i^{\mathbf{c}}}))$ への自然な射影を表し、また、$G_i := \exp \mathfrak{g}_i$, $K_i := \exp(\mathrm{Fix}(\theta|_{\mathfrak{g}_i}))$ とする。このとき、$M'_i \hookrightarrow G_i/K_i(i=1,2)$ がプロパー複素等焦部分多様体であることと、$M \hookrightarrow G/K$ が $M'_1 \times M'_2 \times G_0/K_0 \hookrightarrow G_1/K_1 \times G_2/K_2 \times G_0/K_0$ に合同であることが示される $(G_0 := \exp \mathfrak{g}_0,\ K_0 := \exp(\mathrm{Fix}(\theta|_{\mathfrak{g}_0})))$。 q.e.d.

5. Hermann型作用の例

次の表1は、(A-I,II,III) 型の既約非コンパクト型対称空間上の Hermann 型作用のリストであり、表2はそれらの双対作用のリストである。なお、表2における α は $SU(\cdot)$ の外部自己同型写像を表す。

type	H	G/K	cohom
(AI-I)	$SO(n)$	$SL(n,\mathbf{R})/SO(n)$	$n-1$
(AI-I$'$)	$SO_0(p,n-p)$ $(p \le n-p)$	$SL(n,\mathbf{R})/SO(n)$	$n-1$
(AI-II)	$Sp(n,\mathbf{R})$	$SL(2n,\mathbf{R})/SO(2n)$	$n-1$
(AI-III)	$(SL(p,\mathbf{R}) \times SL(n-p,\mathbf{R})) \cdot \mathbf{R}_*$	$SL(n,\mathbf{R})/SO(n)$	$\min\{p,n-p\}$
(AI-III$'$)	$SL(n,\mathbf{C}) \cdot U(1)$	$SL(2n,\mathbf{R})/SO(2n)$	n
(AII-I)	$SO^*(2n)$	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$n-1$
(AII-II)	$Sp(n)$	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$n-1$
(AII-II$'$)	$Sp(p,n-p)$ $(p \le n-p)$	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$n-1$
(AII-III)	$S(U^*(2p) \times U^*(2n-2p))$	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$\min\{p,n-p\}$
(AII-III$'$)	$SL(n,\mathbf{C}) \cdot U(1)$	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$[\frac{n}{2}]$
(AIII-I)	$SO_0(p,q)$	$SU(p,q)/S(U(p) \times U(q))$	$\min\{p,q\}$
(AIII-I$'$)	$SO^*(2p)$	$SU(p,p)/S(U(p) \times U(p))$	p
(AIII-II)	$Sp(p,q)$	$SU(2p,2q)/S(U(2p) \times U(2q))$	$\min\{p,q\}$
(AIII-II$'$)	$Sp(p,\mathbf{R})$	$SU(p,p)/S(U(p) \times U(p))$	$[\frac{p}{2}]$
(AIII-III)	$S(U(i,j) \times U(p-i,q-j))$	$SU(p,q)/S(U(p) \times U(q))$	$\min\{p-i,j\}$ $+\min\{i,q-j\}$
(AIII-III$'$)	$SL(p,\mathbf{C}) \cdot U(1)$	$SU(p,p)/S(U(p) \times U(p))$	p

(G/K 上の H 作用は Hermann 型作用である)

表1.

type	H^*	G^*/K
(AI-I)*	$SO(n)$	$SU(n)/SO(n)$
(AI-I')*	$\alpha(SO(n))$	$SU(n)/SO(n)$
(AI-II)*	$Sp(n)$	$SU(2n)/SO(2n)$
(AI-III)*	$S(U(p)\times U(n-p))$	$SU(n)/SO(n)$
(AI-III$'$)*	$S(U(n)\times U(n))$	$SU(2n)/SO(2n)$
(AII-I)*	$SO(2n)$	$SU(2n)/Sp(n)$
(AII-II)*	$Sp(n)$	$SU(2n)/Sp(n)$
(AII-II$'$)*	$\alpha(Sp(n))$	$SU(2n)/Sp(n)$
(AII-III)*	$S(U(p)\times U(2n-p))$	$SU(2n)/Sp(n)$
(AII-III$'$)*	$S(U(n)\times U(n))$	$SU(2n)/Sp(n)$
(AIII-I)*	$SO(p+q)$	$SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$
(AIII-I$'$)*	$SO(2p)$	$SU(2p)/S(U(p)\times U(p))$
(AIII-II)*	$Sp(p+q)$	$SU(2p+2q)/S(U(2p)\times U(2q))$
(AIII-II$'$)*	$Sp(p)$	$SU(2p)/S(U(p)\times U(p))$
(AIII-III)*	$S(U(i+j)\times U(p+q-i-j))$	$SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$
(AIII-III$'$)*	$\alpha(S(U(p)\times U(p)))$	$SU(2p)/S(U(p)\times U(p))$

(G^*/K 上の H^* 作用は表 1 の H 作用の双対作用である)

表 2.

主な参考文献

[BV] J. Berndt and L. Vanhecke, Curvature adapted submanifolds, Nihonkai Math. J. **3** (1992) 177-185.

[C] U. Christ, Homogeneity of equifocal submanifolds, J. Differential Geometry **62** (2002) 1-15.

[E] H. Ewert, A splitting theorem for equifocal submanifolds in simply connected compact symmetric spaces, Proc. of Amer. Math. Soc. **126** (1998) 2443-2452.

[HL] E. Heintze and X. Liu, A splitting theorem for isoparametric submanifolds in Hilbert space, J. Differential Geometry **45** (1997) 319-335.

[HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley type restriction theorem, arXiv:math.DG/0004028 v2.

[HPTT] E. Heintze, R. S. Palais, C. L. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces, Geometry, topology and physics, 214–245 Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology **4**, Internat. Press, Cambridge, Mass., 1995.

[He] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[K1] N. Koike, Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space, Kyushu J. Math. **58** (2004) 167-202.

[K2] N. Koike, Complex equifocal submanifolds and infinite dimensional anti-Kaehlerian isoparametric submanifolds, Tokyo J. Math. **28** (2005) 201-247.

[K3] N. Koike, Actions of Hermann type and proper complex equifocal submanifolds, Osaka J. Math. **42** (2005) 599-611.

[K4] N. Koike, A splitting theorem for proper complex equifocal submanifolds, to appear in Tohoku Math. J.

[K5] N. Koike, On curvature-adapted and proper complex equifocal submanifolds, in preparation.

[K6] N. Koike, The complexifications of pseudo-Riemannian manifolds and anti-Kaehler geometry, in preparation.

[Kol] A. Kollross, A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2001) 571-612.

[PaTe2] R.S. Palais and C.L. Terng, Critical point theory and submanifold geometry, Lecture Notes in Math. **1353**, Springer, Berlin, 1988.

[S] R. Szöke, Involutive structures on the tangent bundle of symmetric spaces, Math. Ann. **319** (2001) 319-348.

[T1] C.L. Terng, Isoparametric submanifolds and their Coxeter groups, J. Differential Geometry **21** (1985) 79-107.

[T2] C.L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, J. Differential Geometry **29** (1989) 9-47.

[TT] C.L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, J. Differential Geometry **42** (1995) 665-718.