スカラー曲率一定な完備超曲面の構成

岡安　隆　　茨城大学教育学部

1　Introduction

M を，3 次元のユークリッド空間の完備な曲面でガウス曲率が一定なものとする．すると良く知られているように，M は球面か平面か円柱である．Thomas (1936) はこの結果を高次元化し，ユークリッド空間の Einstein 超曲面は局所的に，平坦な超曲面か球面の一部に合同であることを証明した．

さて，曲率条件をスカラー曲率一定に弱めた場合を考えよう．スカラー曲率一定は局所的には弱い条件であるから，大局的な定理が重要であると思われる．まず次の定理がよく知られている．

定理 (Cheng-Yau, 1977)
ユークリッド空間の完備超曲面でスカラー曲率が一定で断面曲率が非負なものは，球面か平坦超曲面か一般化された円柱 $S^p \times \mathbf{R}^{n-p}$ のいずれかである．

この結果をもとに Yau は彼の著名な「問題集」で次の問題を提出した．

Yau の問題
ユークリッド空間のコンパクトな超曲面でスカラー曲率一定なものは球面に限るか．

Ros (1988) はこの問題を，超曲面が埋めこまれている場合に証明した．したがって，超曲面がはめ込まれているときが open problem として残っている．これに対し我々はつぎの結果を得た．

定理 ([1])
M をユークリッド空間の完備な一般化された回転超曲面でスカラー曲率が一定なものとする．すると M は球面である．

つぎに noncomapct な完備な超曲面を考えよう．上に述べた他にもいくつかの結果が証明されているが，平均曲率一定な超曲面に関する結果が多くあるのに比して，多くの結果があるとはいえない．その理由の一つはもちろん，スカラー曲率一定の方程式の複雑さにある．しかしもう一つの理由として，例の少なさがあると思われる．現在知られている例は次のものだけである．

- 平坦超曲面

- 一般化された円柱 $S^p \times E^{n-p}$
- 回転超曲面 (1-parameter で存在する)
  (M. Leite, 1990)
- 負の定スカラー曲率を持つ完備超曲面 $\subset E^4$
  (Okayasu, 1989)
- スカラー曲率 0 の完備超曲面 $\subset E^4$
  (O. Palmas, 2000)
- スカラー曲率 0 の完備超曲面 $\subset E^{2n}$
  (J. Sato, 2000)

この note では，我々はまったく新しい例を無限個作ることに成功したことを報告する．

2 構成法

$O(p+1) \times O(q+1)$ の $\mathbf{R}^{p+1} \times \mathbf{R}^{q+1}$ への普通の作用を考える．$\gamma = \gamma(s) = (x(s),\ y(s))$ を第一象限 $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ の曲線で弧長でパラメータ表示されたものとする．M_γ を γ を母線とする $O(p+1) \times O(q+1)$-不変な $\mathbf{R}^{p+q+2}$ の超曲面とする． M_γ は $S^p \times S^q \times \mathbf{R}$ に微分同相である．M_γ の主曲率を計算するのは簡単である． $x'y'' - y'x''$, $\frac{y'}{x}$, $-\frac{x'}{y}$ であり，重複度はそれぞれ 1, p, q である．したがって M_γ のスカラー曲率 S は

$$\begin{aligned} S = \quad & 2(x'y'' - y'x'')\left(p\frac{y'}{x} - q\frac{x'}{y}\right) + p(p-1)\left(\frac{y'}{x}\right)^2 \\ & + q(q-1)\left(\frac{x'}{y}\right)^2 - 2pq\frac{y'}{x}\frac{x'}{y} \end{aligned}$$

となる．S が定数であるとするとこの方程式は次の常微分方程式系と同値になる．

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \\ \frac{dy}{ds} = \sin\alpha, \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{p(p-1)(\frac{\sin\alpha}{x})^2 - 2pq\frac{\sin\alpha}{x}\frac{\cos\alpha}{y} + q(q-1)(\frac{\cos\alpha}{y})^2 - S}{2(q\frac{\cos\alpha}{y} - p\frac{\sin\alpha}{x})}. \end{cases}$$

ここで α は接ベクトル $(x',\ y')$ と x 軸とのなす角である．

主定理は次の二つである．

定理 1
$p \leq q+1,\ S > 0\ (p \geq 2)$ 　とする． $0 < x_0 \leq \sqrt{p(p-1)/S}$ と $0 < y_0 \leq \sqrt{q(q-1)/S}$ とする．すると，常微分方程式系 (I) は初期条件 $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$ and $\alpha(0) = 0$ 　に対して，$(-\infty,\ \infty)$ で定義され，かつ，第一象限に入る大域的な解をもつ．したがって，M_γ はスカラー曲率一定 $S > 0$ で完備な超曲面になる．

定理 2
$p > q{+}1,\ S > 0\ (p \geq 2)$　とする．$0 < x_0 \leq \sqrt{(p-1)(q-1)/S}$ と $0 < y_0 \leq \sqrt{q(q-1)/S}$　とする．すると，常微分方程式系 (I) は初期条件 $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$ and $\alpha(0) = 0$ に対して，$(-\infty,\ \infty)$ で定義され，かつ，第一象限に入る大域的な解をもつ． したがって，M_γ はスカラー曲率一定 $S > 0$ で完備な超曲面になる．

常微分方程式系 (I) の解が無限に伸びることを示すためには，解の評価が必要である．そのため次の比較方程式を考える．

$$
\text{(II)} \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \\ \frac{dy}{ds} = \sin\alpha, \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{q(q-1)(\frac{\cos\alpha}{y})^2 - S}{2q\frac{\cos\alpha}{y}}. \end{cases}
$$

この微分方程式系は x に定数を加えても不変なので，第一積分が存在することがわかる．実際

$$
\left\{ q(q+1)\left(\frac{\cos\alpha}{y}\right)^2 - S \right\} y^{q+1} = 一定
$$

となる．

補題 1 （比較定理）

(1) $y_0 < \sqrt{q(q-1)/S}$ とする．方程式 (I), (II) を初期条件 $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ \alpha(0) = 0$ で解く．このとき方程式 (II) の α を $\overline{\alpha}$ と表し，$\alpha,\ \overline{\alpha}$ を y の関数と考えると

$$
\alpha(y) < \overline{\alpha}(y) \qquad (y > y_0)
$$

が成り立つ（Fig 1 参照）．

(2) $\sqrt{q(q-1)/S} < y_0 < \sqrt{q(q+1)/S}$ とする．方程式 (I), (II) を初期条件 $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ \alpha(0) = 0$ で解く．このとき方程式 (II) の α を $\overline{\alpha}$ と表し，$\alpha,\ \overline{\alpha}$ を y の関数と考えると

$$
\alpha(y) > \overline{\alpha}(y) \qquad (y < y_0)
$$

が成り立つ（Fig 2 参照）．

補題 1 を繰り返し適用して，$0 \leq s < \infty$ での解の存在がいえる．

$s < 0$ での解の様子を調べるため，次の補題が必要である．

補題 2
$-\frac{\pi}{2} < \alpha(s) < 0$　である限り，$\{(x,\ y) | 0 < x < \sqrt{p(p-1)/S},\ 0 < y < \sqrt{q(q-1)/S}\}$ の中では $\alpha'(s) > 0$.

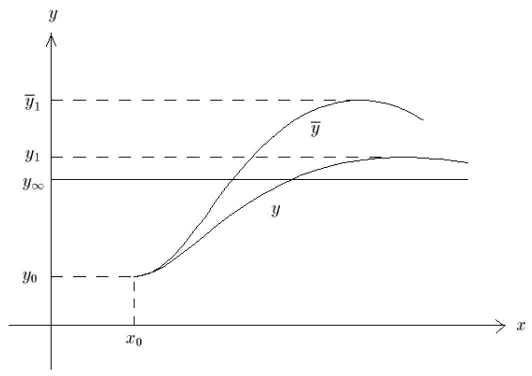


Figure 1:

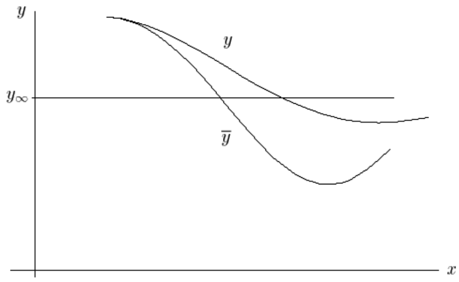
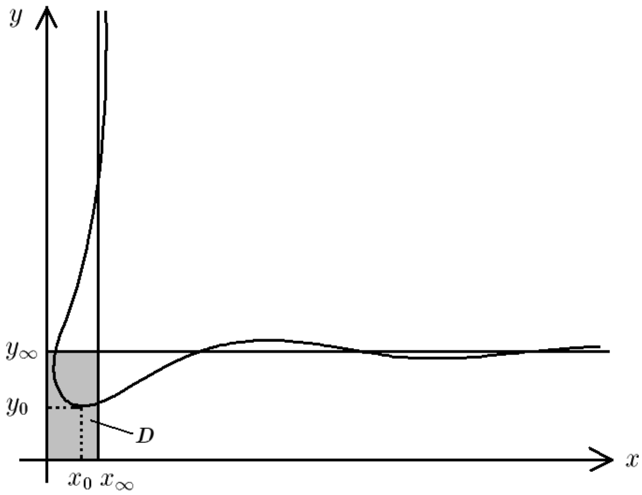


Figure 2:

この補題を用いて次のことが示せる．

$$-\infty < \exists s_1 < 0 \quad s.t. \quad \alpha(s_1) = -\frac{\pi}{2}, \quad x(s_1) < x_0$$

この事実と補題 1 を組み合わせて $-\infty < s \leq 0$ での解の存在がいえる．定理 1 の解曲線の概形は次の図のようになる（ここで $y_\infty = \sqrt{q(q-1)/S}$, $x_\infty = \sqrt{p(p-1)/S}$ である）．



参考文献

[1] Takashi Okayasu,
On compact hypersurfaces with constant scalar curvature in the Euclidean space, Kodai Math. J. vol. 28, no. 3, pp.577-585 (2005).