ハミルトン体積最小性の等周不等式的アプローチについて

首都大学東京　日本学術振興会特別研究員（PD）　小野　肇

本講演のテーマは『「等周不等式の一般化」を用いて「ハミルトン体積最小性」を示す事が出来る可能性について』である.

今回の話の基になっているのは Hélein の論文 [H1], [H2] である. さらにこれらの論文はキャリブレーションの考え方を踏まえて考えられている；リーマン多様体 (M, g) 上にキャリブレーション $\alpha \in Z^p(M)$ とキャリブレートされた部分多様体 N があると, N とホモロガスな任意の N' に対して

$$\mathrm{Vol}(N') \overset{1}{\geq} \int_{N'} \alpha \overset{2}{=} \int_N \alpha \overset{3}{=} \mathrm{Vol}(N) \tag{1}$$

が成り立ち, N はホモロジー体積最小性を持つことがわかる. 不等号 1 は体積と "不変量"（α が閉形式であることから来る等式 2 がここで言う不変性である）との比較であり, この不等式の等号が成立するようなものがあれば（等号 3）最小性が得られるという仕組である. この仕組自身は

$$\int_{N'} \alpha \Rightarrow \text{ある } N \text{ の変形空間 } D(N) \text{ 上の不変量 } m(N')$$

に変えてやっても(1) と同様に $D(N)$ 上の体積最小性を導く；もし, $\mathrm{Vol}(N) = m(N)$ であり, さらに任意の $N' \in D(N)$ に対して $\mathrm{Vol}(N') \geq m(N')$ が成り立つとすると N は $D(N)$ 上体積最小である.

例 1 (等周不等式). 2 次元単位球面 $S^2(1)$ 内の小円 l_0 を考える.

$$D(l_0) := \{l \subset S^2(1), \text{ 単純閉曲線 } |(l \text{ が囲む円盤の面積}) = (l_0\text{が囲む円盤の面積})\}$$

$$m(l)^2 := (l \text{ が囲む円盤の面積})(4\pi - (l \text{ が囲む円盤の面積}))$$

とおくと, $m(l)$ は $D(l_0)$ 上の不変量であり, 任意の $l \in D(l_0)$ に対して

$$(l \text{ の長さ}) \overset{i}{\geq} m(l) \overset{ii}{=} m(l_0) \overset{iii}{=} (l_0\text{の長さ})$$

が成り立つ. もちろん, ここで一番重要になるのは等周不等式 i である.

参考（1 次元の Weierstrass Field Theory）：実は, 体積以外の汎関数の場合（特に 1 次元の対象の場合）でも, 同様の方法で最小性が得られることが知られている（例えば, 一番簡単な場合の概略は [H2] に述べられている. 詳しくは [R], [GH] 参照. 特に, [GH] ではキャリブレーションの考え方を参考に書かれているので, ものすごく長いことを除けば, こちらのほうが読みやすいと思う）；ラグランジュ形式 $\int L(t, x(t), x'(t))dt$ で汎関数が与えられているとする. このとき, ものすごく荒い言い方をすると, もし, $\mathbb{R} \times$ (target space) がオイラー・ラグランジュ方程式の解のグラフにより foliate されていて, L が "良い性質" を持つと, 次の性質を満たす「キャリブレーター」と呼ばれるラグランジアン M が存在することがわかる；

- $L(t,x(t),x'(t)) \geq M(t,x(t),x'(t))$
- $\int M(t,x(t),x'(t))dt$ は "不変性" を持っている
- 各 leaf を与える $x(t)$ に関しては $L(t,x(t),x'(t)) = M(t,x(t),x'(t))$

したがって, 式(1) と同じように, 各 leaf を与える $x(t)$ は汎関数 $\int L(t,x(t),x'(t))dt$ に関して最小性を持つ．例えば（ラグランジュ形式ではないが）2 次元平面における 2 点を結ぶ最短線が線分であることの証明（[T1], [T2] 等参照）や Hélein による等周不等式の証明（[H1], [H2]）はこのような「オイラー・ラグランジュ方程式の解による foliation からキャリブレーターが得られる」例である．

さて, 高次元の対象について上の方法がうまくいく良い例が無いだろうか？という疑問が自然に生じる．特にここでは $S^2(1)$ の等周不等式の自然な形での高次元化として次の予想を考えてみよう．

予想 2. $\mathbb{CP}^n$ 上の T^n-作用 $(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})\cdot[z^0:\cdots:z^n] = [z^0:e^{i\theta_1}z^1:\cdots:e^{i\theta_n}z^n]$ を考える．このとき, $[z^0:\cdots:z^n] \in (\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$, $({}^\forall j, z^j \neq 0)$ の軌道 $T^n\cdot[z^0:\cdots:z^n]$ はハミルトン体積最小である．（局所ハミルトン体積最小であることは *[O]* で証明されている．ハミルトン体積最小性に関する定義については *[O]* や過去の幾何シンポジウムの予稿等参照．）

実は, 式(1) の等号 2, 3 にあたるものは, この場合にも成り立つことが簡単な計算よりわかる；まず, 上の T^n-作用はハミルトン作用であり, モーメント写像 $\mu:\mathbb{CP}^n \to \mathbb{R}^n$ を用いると, $T^n\cdot[z^0:\cdots:z^n] = \mu^{-1}(x)$, $x = \mu([z^0:\cdots:z^n])$ と書ける．（条件 ${}^\forall j, z^j \neq 0$ は x が $\mathrm{Image}\,\mu$ の内点であることと同値である．）

<u>3 の類似</u>：$x \in (\mathrm{Image}\,\mu\text{の内部})$ に対して $\mu^{-1}(x)$ に境界が含まれるような $n+1$ 個の 2 次元円盤 $D_1(x),\ldots,D_{n+1}(x)$ が存在して

$$\mathrm{Vol}(\mu^{-1}(x))^2 = C_n \left| \prod_{j=1}^{n+1} \int_{D_j(x)} \omega \right| \tag{2}$$

と書ける, ここで, C_n は x によらない定数である．（$D_j(x)$ は 2 次元球面の場合の類似で, 多面体 $\mathrm{Image}\,\mu$ の $n+1$ 個の各面に対応した "vanishing cycle" の軌跡により得られる円盤である．2 次元球面の場合には $\mathrm{Image}\,\mu = [-1,1]$ の境界が二つで, 二つの円盤の "面積" の積により小円の長さの２乗が与えられていた．）

<u>2 の類似</u>：一般にシンプレクティック多様体 (M,ω) のラグランジュ部分多様体 L が与えられたとき, 準同型

$$A_L : \pi_2(M,L) \to \mathbb{R}, \quad A_L([u]) := \int_{D^2} u^*\omega \tag{3}$$

はハミルトンイソトピーで不変である．

つまり, 式(2) は $\mu^{-1}(x)$ の体積が右辺（の平方根）の「ハミルトン不変量」と等しいということを表している．したがって, 式(1) 的な見方から, 予想 2 は, 次の「等周不等式の一般化」が成り立てば正しいことになる．

予想 3 (等周不等式の一般化). 任意のハミルトン微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$ に対して

$$\mathrm{Vol}(\phi\mu^{-1}(x))^2 \geq C_n \left| \prod_{j=1}^{n+1} \int_{\phi D_j(x)} \omega \right| \tag{4}$$

もちろん, この式は単に予想 2 を書き換えただけ, といわれてしまうとそうなのだが, 今までハミルトン体積最小性が知られている例における証明は基本的に「２つのラグランジュ部分多様体の体積の比較」という視点であったのに対し, この不等式は「１つのラグランジュ部分多様体での２つの量の比較」という視点である．この変化は（仮にこの考え方が正しいとすると）証明の方法にかなりの幅を与える可能性を持っている．例えば, １次元の場合のように, 良い foliation を与えてやることでキャリブレーターを得ることが出来れば証明できる．また, 一般のリーマン多様体に関する等周問題の考え方ではなく, $\mathbb{R}^2$ や $S^2(1)$ でのみ成立するような特殊な考え方で, $\mathbb{CP}^n$ の場合に一般化できるものが中にはあるのではないかと思う．（おそらく, 正則性をどこかで用いるものであれば $\mathbb{CP}^n$ の場合に適用できるはずだと思う．）

References

[GH] M. Giaquinta, and S. Hildebrandt, Calculus of variations I and II, Springer, 1996

[H1] F. Hélein, Inégalité isopérimétrique et calibration, Annales de l'Institute Fourier 44, 1211-1218, 1994.

[H2] F. Hélein, Isoperimetric inequalities and calibrations, Pitman Res. Notes Math. Ser., 345, 92–105, 1996.

[O] H. Ono, Hamiltonian stability of Lagrangian torus in toric Kähler manifolds, preprint.

[R] H. Rund, Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations, Van Nostrand, London 1966.

[T1] 田崎博之, 等質空間の部分多様体の積分幾何学, 「２１世紀の数学」pp. 199-208, 2004.

[T2] 田崎博之, 等質空間の部分多様体の積分幾何学, 数学, Vol. 54, No. 3, 280-291, 2002.