弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体

田崎博之
筑波大学数理物質科学研究科

(井川 (福島高専)、酒井 (首都大学東京) との共同研究)

Riemann 多様体の鏡映部分多様体と austere 部分多様体の中間概念になる弱鏡映部分多様体の概念を提起し、等質な弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体の例を構成した。さらにこれら部分多様体の幾何学的性質を調べる研究を進めている。この研究については作成中の論文 [2] で発表する予定である。

X を完備 Riemann 多様体とする。X の対合的等長変換の固定点集合の連結成分を**鏡映部分多様体**という。この概念は Leung [3] が導入した。鏡映部分多様体は完備全測地的部分多様体になる。鏡映部分多様体を定める対合的等長変換は鏡映部分多様体に対して一意的に定まる。そこでこの一意的に定まる対合的等長変換をその鏡映部分多様体の**鏡映**と呼ぶことにする。M を X の鏡映部分多様体とする。σ_M を M の鏡映とする。各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ 対して

$$\sigma_M(x) = x, \qquad (d\sigma_M)_x\xi = -\xi, \qquad \sigma_M(M) = M$$

が成り立つ。そこで、部分多様体の各点における各法ベクトルに対してこのような条件を満たす等長変換が存在するという性質に注目して次の定義を与える。

定義 X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とする。各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ に対して次の条件を満たす X の等長変換 σ_ξ が存在するとき、M を**弱鏡映部分多様体**という。

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x\xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M.$$

この定義を与えるにあたって、Podestà [4] の議論も参考になった。

X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とし、M のシェイプ作用素を A で表わす。M の任意の点の任意の法ベクトル ξ に対して A_ξ の固有値が -1 倍に関して不変であり、-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき、M を **austere 部分多様体**という。この概念は Harvey-Lawson [1] が導入した。

鏡映部分多様体、弱鏡映部分多様体、austere 部分多様体、極小部分多様体の間には次の関係がある。

$$\text{鏡映} \Rightarrow \text{弱鏡映} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}$$

弱鏡映部分多様体が austere になることを示しておく。M が X の弱鏡映部分多様体のとき、各点 $x \in M$ の各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して、$(d\sigma_{\xi})_x$ は M のシェイプ作用素 A_{ξ} の固有値 λ の固有ベクトル空間を固有値 $-\lambda$ の固有ベクトル空間に写す。したがって、M は austere 部分多様体になる。

弱鏡映部分多様体の例を示しておく。

$$S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1) = \{(x, y) \mid x, y \in S^{n-1}(1)\}$$

は半径 $\sqrt{2}$ の $2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の弱鏡映部分多様体になる。$S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1)$ は $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の等質部分多様体なので、弱鏡映部分多様体の条件を $S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1)$ の一点で確かめればよい。

$$x = (1, 0, \ldots, 0, \overset{n+1}{\breve{1}}, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1)$$

に対して、

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &= (y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad ((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in S^{2n-1}(\sqrt{2})) \end{aligned}$$

によって $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の等長変換 σ を定める。$\sigma(x) = x$ となり、$d\sigma_x$ は $T_x^{\perp}(S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1))$ では -1 倍になり、$\sigma(S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1)) = S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1)$ が成り立つことがわかる。これより、$S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1)$ は $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ 内の弱鏡映部分多様体になる。

弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体の関係を見るために、既約対称対の線形イソトロピー群の軌道について調べ、球面内で弱鏡映部分多様体になる軌道と austere 部分多様体になる軌道をすべてを分類した。たとえば、制限ルートに対応する元の軌道は球面内の弱鏡映部分多様体になる。球面内の austere 部分多様体であって弱鏡映にはならないものもいくつか存在することもわかった。

参考文献

[1] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[2] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Weakly reflective submanifolds, in preparation.

[3] Dominic S. P. Leung, The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces, J. Differential Geometry, **8** (1973), 153 – 160.

[4] F. Podestà, Some remarks on austere submanifolds, Boll. Un. Mat. Ital. B(7) **11** (1997), no.2, suppl., 157–160.