アファイン対称空間とコンパクト3-対称空間の複素構造及び全実全測地的部分多様体

東條晃次　　千葉工業大学

1　Introduction.

リーマン 3-対称空間には、不変概複素構造が存在する。また、Wang による C-空間の分類によって、コンパクトリーマン 3-対称空間の中には可積分不変複素構造を許容するものが存在することがわかる。この講演では、標準概複素構造とある種の対合的自己同型写像を用いて、任意の不変複素構造を書き表すことが出来ることを述べ、さらにある種のアファイン対称空間の幾何学的構造からこれらの対合的自己同型写像が得られることをお話する。また、不変複素構造に関する半分次元の全実全測地的部分多様体の分類についても述べる。

2　Preliminaries.

ここでは、リーマン 3-対称空間の定義、性質および graded Lie algebra の分類について簡単に述べる。

G を Lie 群、H をその閉部分群で、$\mathrm{Ad}(H)$ がコンパクトなものとする。$<,>$ を G の左不変計量から誘導された等質空間 G/H の G-不変リーマン計量とする。

G の位数 3 の自己同型写像 σ が存在して以下を満たすとき、$(G/H,<,>)$（もしくは、$(G/H,\sigma,<,>)$）をリーマン 3-対称空間とよぶ。

(1) $(G^\sigma)_0 \subset H \subset G^\sigma$, ($G^\sigma$ は σ の固定点全体、${G^\sigma}_0$ はその単位元を含む連結成分)

(2) s を $\pi \circ \sigma = s \circ \pi$ で定まる $(G/H,<,>)$ の微分同相写像とするとき、s は等長的

$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をそれぞれ G, H のリー環とする。$\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(H)$-不変かつ σ-不変分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ をとり、$\mathfrak{m}$ と G/H の $\{H\}$ における接空間と $\mathfrak{m}$ を同一視しておく。このとき、$(\mathfrak{m}, \langle,\rangle)$ の等長変換 J が

$$\sigma|_{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathfrak{m}} + \frac{\sqrt{3}}{2}J$$

によって定まる。σ と $\mathrm{Ad}(H)$ は可換であることから J から G/H 上に G-不変概複素構造が誘導される (同じ記号 J で表すことにする)。この概複素構造 J を、G/H の標準概複素構造と呼ぶことにする。

次に graded Lie algebra について述べる。$\mathfrak{g}^*$ を noncompact simple Lie algebra とする。$\mathfrak{g}^*$ の第 ν 種の *gradation* とは、$\mathfrak{g}^*$ の部分ベクトル空間の族 ${\mathfrak{g}^*}_k$ $(-\nu \leq k \leq \nu)$ であって次を満たすものを言う。

$$\mathfrak{g}^* = {\mathfrak{g}^*}_{-\nu} + \cdots + {\mathfrak{g}^*}_0 + \cdots + {\mathfrak{g}^*}_\nu \quad \text{(direct sum decomposition)}$$
$$[{\mathfrak{g}^*}_p, {\mathfrak{g}^*}_q] \subset {\mathfrak{g}^*}_{p+q} \qquad ({\mathfrak{g}^*}_\nu \neq \{0\}).$$

このとき次を満たす元 $Z \in \mathfrak{g}^*$ が一意に存在する (Z を characteristic element という)。

$$\mathrm{ad}(Z)|_{{\mathfrak{g}^*}_p} = p \cdot \mathrm{Id}_{{\mathfrak{g}^*}_p}.$$

τ を $\mathfrak{g}^*$ の Cartan 対合とし、$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を τ に対する Cartan 分解とする ($\mathfrak{k}$ はリー環、$\mathfrak{p}$ は部分空間)。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とし、$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ を $\mathfrak{a}$ に関する $\mathfrak{g}^*$ の制限ルート系の 1 つの基本系とする。Π の部分集合の族 Π_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ が

$$\Pi = \bigcup_{i=0}^{n} \Pi_i \quad \text{(disjoint union)}, \qquad \Pi_1 \neq \emptyset, \quad \Pi_n \neq \emptyset$$

を満たすとき、$(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$ を Π の *partition* と呼ぶ。Π の 2 つの partition $(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$ と $(\Pi'_0, \cdots, \Pi'_m)$ が同値であるとは、$m = n$ かつ Π の Dynkin 図形の自己同型で Π_i を Π'_i $(0 \leq i \leq n)$ に移すものが存在するときをいう。

Theorem 2.1 (Kaneyuki and Asano [KA]) $\mathfrak{g}^*$ の *gradation* の同値類全体と Π の *partition* の同値類全体のなす集合の間には 1 対 1 対応が存在する。

Theorem2.1 の 1 対 1 対応は以下のように構成される。

$(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$ を Π の partition とする。任意の制限ルート $\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i$ に対して

$$h_\Pi(\alpha) = \sum_{\alpha_i \in \Pi_1} m_i + 2 \sum_{\alpha_j \in \Pi_2} m_j + \cdots + n \sum_{\alpha_k \in \Pi_n} m_k$$

とおく。$Z \in \mathfrak{a}$ を $\alpha(Z) = h_\Pi(\alpha)$ によって定める。このとき、Theorem2.1 の対応は $(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$ の同値類に対して Z を characteristic element にもつ $\mathfrak{g}^*$ の gradation の同値類を対応させることにより与えられる。

3 Complex structures.

ここでは、既約なコンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H, \sigma, <,>)$ で、不変複素構造を持つものを考える。ただし、$<,>$ は G の両側不変計量から誘導されたものとしておく。このとき、G はコンパクト単純 Lie 群で、H はある torus の centralizer であるとしてよい (または、H の center の次元 $\neq 0$)。

$(G/H, \sigma, <,>)$ の標準概複素構造を J とし、I を任意の G-不変複素構造とする。このとき、$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を

$$\varphi|_{\mathfrak{m}} := I \circ J, \qquad \varphi|_{\mathfrak{h}} := \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$$

により定めると、φ は $\mathfrak{g}$ の (内部型の) involutive automorphism であることが示せる。さらに次が成り立つ。

Proposition 3.1 $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を内部型の *involutive automorphism* で $\varphi|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$, $\varphi \neq \mathrm{Id}$ を満たすものとする。このとき、$I := -\varphi \circ J$ は $(G/H, \sigma, <,>)$ の G-不変複素構造を誘導する。逆に、$(G/H, \sigma, <,>)$ の任意の G-不変複素構造は上のようにして得られる。

4　全実全測地的部分多様体.

この節では、コンパクトリーマン 3-対称空間の標準概複素構造に関する半分次元の全実全測地的部分多様体について考える。$\mathfrak{g}^*$ を noncompact 単純 Lie 環でその複素化も単純であるものとし、

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*{}_{-2} + \mathfrak{g}^*{}_{-1} + \mathfrak{g}^*{}_{0} + \mathfrak{g}^*{}_{1} + \mathfrak{g}^*{}_{2}$$

を第 2 種の単純階別 Lie 環で $\mathfrak{g}^*$ の複素化も単純であるものとする。また、Z をこの階別 Lie 環の characteristic element とし、τ を grade-reversing Cartan involution とする。$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を τ に対応する Cartan decomposition ($\tau|_{\mathfrak{k}} = 1$, $\tau|_{\mathfrak{p}} = -1$) とすると、

$$\sigma := \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$$

は $\mathfrak{g} := \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ の位数 3 の自己同型であることがわかる。ここで、$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}^*$ の compact dual である。G を $\mathfrak{g}$ を Lie 環とするコンパクト単純 Lie 群とし、H を $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^{\sigma}$ に対応する G の analytic Lie 部分群とする。さらに、K を $\mathfrak{k}$ に対応する G の analytic Lie 部分群とする。このとき、次が成り立つ。

Theorem 4.1 *([To1])* コンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H, <,>, \sigma)$ において、H の *center* の次元は 0 でないとする *(*すなわち、H はあるトーラスの *centralizer* となっている*)*。このとき、$K \cdot o$ は標準概複素構造 J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体となる。逆に、J に関する任意の半分次元の全実全測地的部分多様体はこのようにして得られたものに共役である。

次に、$(G/H, <,>, \sigma)$ を G-不変複素構造を許容するコンパクトリーマン 3-対称空間とし、I を G-不変複素構造とする。Proposition3.1 を使って [To1] と同様の議論をすることにより、次がわかる。

Proposition 4.2 I に関する $(G/H, <,>, \sigma)$ の半分次元の全実全測地的部分多様体は J に関しても半分次元の全実全測地的部分多様体となる *(*逆は一般には成り立たない*)*。

5　主結果.

この節では K_ε タイプのアファイン対称空間を用いた、コンパクトリーマン 3-対称空間の不変複素構造およびそれに関する半分次元の全実全測地的部分多様体の分類について述べる。

$\mathfrak{g}^*$ を非コンパクト単純 Lie 環とし、$(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ を第 2 種の階別 Lie 環から得られる K_ε タイプの symmetric pair とする。すなわち、

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*{}_{-2} + \mathfrak{g}^*{}_{-1} + \mathfrak{g}^*{}_{0} + \mathfrak{g}^*{}_{1} + \mathfrak{g}^*{}_{2}$$

を第 2 種の階別 Lie 環とし、Z をその characteristic element、τ を grade-reversing Cartan involution とする。$\mathfrak{g}^*$ の involution τ_ε および Lie 部分環 $\mathfrak{k}_\varepsilon$ を

$$\tau_\varepsilon := \mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z) \circ \tau, \quad \mathfrak{k}_\varepsilon := \mathfrak{g}^{*\tau_\varepsilon}$$

により定義する。τ と $\mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z)$ が可換であることから、τ_ε と $\mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z)$ も可換となることがわかる。$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}_\varepsilon + \mathfrak{p}_\varepsilon$ を τ_ε に対応する $\mathfrak{g}^*$ の分解とし、$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を τ に対応する Cartan 分解とすると簡単にわかるように

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{k}_\varepsilon & = & \mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{k} \;\oplus\; (\mathfrak{g}^*{}_1 + \mathfrak{g}^*{}_{-1}) \cap \mathfrak{p} \;\oplus\; (\mathfrak{g}^*{}_2 + \mathfrak{g}^*{}_{-2}) \cap \mathfrak{k} \\ \mathfrak{p}_\varepsilon & = & \mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{p} \;\oplus\; (\mathfrak{g}^*{}_1 + \mathfrak{g}^*{}_{-1}) \cap \mathfrak{k} \;\oplus\; (\mathfrak{g}^*{}_2 + \mathfrak{g}^*{}_{-2}) \cap \mathfrak{p} \end{array}$$

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*{}_c)$ の元 σ, φ を次で定める。

$$\sigma := \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z), \quad \varphi := \mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z)$$

簡単にわかるように、$\sigma^3 = \varphi^2 = 1$ である。$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}^*$ の compact dual とすると、明らかに $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ である。$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^\sigma$ とおく。

Case I $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ が noncompactly causal のとき：
$(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ の associated pair を $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}_\varepsilon{}^a)$ とすると

$$\mathfrak{k}_\varepsilon{}^a = \mathfrak{g}^*{}_{ev} = \mathfrak{g}^*{}_0 + \mathfrak{g}^*{}_2 + \mathfrak{g}^*{}_{-2}$$

であり、$\mathfrak{k}_\varepsilon{}^a$ には cone-generating element $X^0 \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}_\varepsilon$ が (符号を除いて) 一意に存在していた (cf. [HO])。今、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*{}_c)$ の元 $\varphi_1{}^\pm$ を次で定義する。

$$\varphi_1{}^\pm := \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(Z \pm X^0))$$

Z が characteristic element、X^0 が cone-generating element であることなどから、φ, $\varphi_1{}^\pm$ は $\mathfrak{g}$ の involutive automorphism で、$\varphi|_\mathfrak{h} = \varphi_1{}^\pm|_\mathfrak{h} = \mathrm{Id}_\mathfrak{h}$ が成り立つことがわかる。したがって Proposition3.1 により、φ, $\varphi_1{}^\pm$ から不変複素構造 I, $I_1{}^\pm$ が構成される。Z, X^0 ともに $\mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{p} (\subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k}_\varepsilon)$ の元であることなどから

$$\varphi(\mathfrak{k}) = \varphi_1{}^\pm(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$$

となり、$(G/H, <,>, \sigma)$ の J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体 $K \cdot o$ は I, $I_1{}^\pm$ に関しても全実である。

Case II 次に、$(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ に対して、その associated pair$(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}_\varepsilon{}^a)$ が pseudo-Hermitian symmetric pair であるとする。このとき、$\mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{k} (\subset \mathfrak{k}_\varepsilon{}^a \cap \mathfrak{k})$ に canonical central element Z^0 が存在する。Z^0 が $\mathfrak{k}_\varepsilon{}^a$ の center の元であり、$\mathrm{ad}(Z^0)$ の $\mathfrak{p}_\varepsilon{}^a = \mathfrak{g}^*{}_{-1} + \mathfrak{g}^*{}_{-1}$ への制限の固有値は $\pm\sqrt{-1}$ であることを考えると、

$$\mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z) = \mathrm{Ad}(\exp \pi Z^0)$$

が成り立つ。したがって、この場合も φ によって複素構造 I が得られ、また

$$\varphi_2{}^\pm := \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}(\sqrt{-1}Z \pm Z^0))$$

によって involutive automorphism が定まり、複素構造 $I_2{}^\pm$ が得られる。この場合は $\varphi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$, $\varphi_2{}^\pm(\mathfrak{k}) \neq \mathfrak{k}$ であることがわかる。したがって、$(G/H, <,>, \sigma)$ の J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体 $K \cdot o$ は、I に関しても全実となるが $I_2{}^\pm$ に関しては全実とはならない。

Case III $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ が Case I, II 以外の場合：
この場合は φ によって複素構造 I が得られ、$\varphi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$ であるので $(G/H, <,>, \sigma)$ の J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体 $K \cdot o$ は、I に関しても全実となる ($\mathfrak{h}$ の center の次元は 1 となる)。

以上をまとめると

Theorem 5.1 (1) $\mathfrak{h}$ の *center* の次元が 1 であるとき、$(G/H, <,>, \sigma)$ の G-不変複素構造 I と標準概複素構造 J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体は一致する。

(2) $\mathfrak{h}$ の *center* の次元が 2 であるとき、$\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$ とすると、$\varphi = \mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z)$ から得られる不変複素構造 I と標準概複素構造 J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体は一致する。

(3) $\mathfrak{h}$ の *center* の次元が 2 であり、$\tilde{I}$ を (2) の I とは共役でない $(G/H, <,>, \sigma)$ の G-不変複素構造とする。このとき、$\tilde{I}$ は $I_1{}^{\pm}$, $I_2{}^{\pm}$ のいずれかに共役であり、$\tilde{I}$ に関して半分次元の全実全測地的部分多様体は、上の *Case I* の階別 *Lie* 環から得られた $K \cdot o$ と同値である。

例 $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{e}_{6(2)}$ とする。このとき、$\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(6)$ である。$\mathfrak{e}_6$ の基本ルート系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_6\}$ と $\mathfrak{g}^*$ の基本制限ルート系 $\Pi = \{\lambda_2, \lambda_4, \lambda_3, \lambda_1\}$ を、$\lambda_i = \alpha_i|_{\mathfrak{a}}$ となるようにとる (Π の最高ルートは $2\lambda_2 + 3\lambda_4 + 4\lambda_3 + 2\lambda_1$)。このとき、第 2 種の階別リー環に対応する Π の partition は

$$\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1, \quad \Pi_1 = \{\lambda_2\} \text{ or } \{\lambda_1\}.$$

$\Pi_1 = \{\lambda_2\}$ ならば、$\mathfrak{k}_\varepsilon{}^a = \mathfrak{su}(3,3) \oplus \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R})$ であり、(center が 0 なので)**Case III** となっている。実際、$\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(6) \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R}$ となり、$\mathfrak{h}$ の center の次元は 1 である。

$\Pi = \{\lambda_1\}$ の場合は、$\mathfrak{k}_\varepsilon{}^a = \mathfrak{so}(4,6) \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R}$ であり、$\mathfrak{k}_\varepsilon{}^a$ の center は $\mathfrak{k}$ に含まれている。したがって、**Case II** となっている。また、$\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(8) \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R} \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R}$ である。

参考文献

[HO] J. Hilgert and G. Ólafsson, *Causal Symmetric Spaces: Geometry and Harmonic Analysis,* Academic Press, San Diego, 1997

[Ka] S. Kaneyuki, *On the subalgebras* $\mathfrak{g}_0$ *and* $\mathfrak{g}_{ev}$ *of semisimple graded Lie algebras,* J. Math. Soc. Japan **45** (1993) 1–19

[KA] S. Kaneyuki and H. Asano, *Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems,* Nagoya Math. J., **112** (1988) 81–115

[OS] T. Oshima and J. Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric spaces,* Invent. Math., **57** (1980) 1–81

[To1] K. Tojo, *Totally real totally geodesic submanifolds of compact* 3*-symmetric spaces,* Tôhoku Math. J., **53** (2001) 131–143

[To2] K. Tojo, *Classification of totally real and totally geodesic submanifolds of compact 3-symmetric spaces,* preprint