曲面の曲率線の測地的曲率について

安藤　直也　(熊本大学大学院自然科学研究科)

0．はじめに　Gauss の方程式と Codazzi-Mainardi の方程式は曲面の第一基本形式, 主分布および主曲率の間の関係を与え, またこれらの間の関係は曲面の空間における在り方, 形状を決定する．これらのうち主曲率は第一基本形式と主分布から殆ど決まってしまう: 臍点を持たずかつ零ではない Gauss 曲率を持つ E^3 の曲面 S に対し, 二つの主曲率の組 (k_1, k_2) は Codazzi-Mainardi 多項式と呼ばれる 2 次の 2 変数同次多項式の零点で, Codazzi-Mainardi 多項式は S の各点で第一基本形式と主分布によって定まる ([3])．よって第一基本形式と主分布の間の関係が曲面の空間における形状を殆ど決定すると考えることができ, 計量と何らかの良い関係にある二つの 1 次元分布が与えられた 2 次元 Riemann 多様体としての曲面に興味を持つことになる．計量と二つの 1 次元分布の間の関係に注目するとき, 2 次元 Riemann 多様体上の 1 次元分布およびその積分曲線の在り方に関する情報として 1 次元分布の積分曲線の測地的曲率に着目する．本稿の目的は曲面の曲率線の測地的曲率について調べた結果を報告することである．

1．　測地的曲率　M を向きづけられた 2 次元多様体とする．g を M 上の計量とし, ∇ を (M, g) の Levi-Civita 接続とする．D を M の領域とし, $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ を D 上の向きづけられた正規直交枠とする．このとき D 上の関数 l_1, l_2 で次を満たすものが存在する: $\nabla_{\boldsymbol{U}_1}\boldsymbol{U}_1 = l_1\boldsymbol{U}_2$, $\nabla_{\boldsymbol{U}_2}\boldsymbol{U}_2 = -l_2\boldsymbol{U}_1$．$l_i$ は $\boldsymbol{U}_i$ の各積分曲線の測地的曲率である．Levi-Civita 接続の性質 $\nabla g \equiv 0$ に注意すると, $\nabla_{\boldsymbol{U}_1}\boldsymbol{U}_2 = -l_1\boldsymbol{U}_1$, $\nabla_{\boldsymbol{U}_2}\boldsymbol{U}_1 = l_2\boldsymbol{U}_2$ がわかる．

V を D 上のベクトル場とする．このとき V の発散および回転と呼ばれる D 上の関数 $\mathrm{div}(V)$ および $\mathrm{rot}(V)$ を考えることができる．V を $V = a_0\boldsymbol{U}_1 + b_0\boldsymbol{U}_2$ と表すとき, 次が成り立つ:

$$\mathrm{div}(V) = \boldsymbol{U}_1(a_0) + \boldsymbol{U}_2(b_0) + a_0 l_2 - b_0 l_1, \quad \mathrm{rot}(V) = \boldsymbol{U}_1(b_0) - \boldsymbol{U}_2(a_0) + a_0 l_1 + b_0 l_2.$$

$V^\perp := -b_0\boldsymbol{U}_1 + a_0\boldsymbol{U}_2$ とおくと, $\mathrm{div}\bigl(V^\perp\bigr) = -\mathrm{rot}(V)$ および $\mathrm{rot}\bigl(V^\perp\bigr) = \mathrm{div}(V)$ が成り立つ．特に, 次が成り立つ:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{U}_1) = \mathrm{rot}(\boldsymbol{U}_2) = l_2, \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{U}_2) = -\mathrm{rot}(\boldsymbol{U}_1) = -l_1.$$

よって $\boldsymbol{U}_i$ の積分曲線の測地的曲率はベクトル場の発散や回転によって表される．

ベクトル場 V が <u>非圧縮 (性)</u> (incompressible) であるとは, V が $\mathrm{div}(V) = 0$ を満たすときにいう; V が <u>渦なし</u> (irrotational) であるとは, V が $\mathrm{rot}(V) = 0$ を満たすときにいう．V は渦なしであるとする．このとき各 $p \in D$ に対し, p の近傍 U_p 上の関数 f が存在して $\mathrm{grad}(f) = V$ が成り立つ．さらに V は非圧縮であるとする．このとき f は $\Delta f = 0$ を満たす (Δ は g に関する M 上の Laplacian).

2．標準的前発散　$\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は M 上の二つの 1 次元分布で, 計量 g に関して M の任意の点で互いに直交しているものとする．M の各点 p に対し, p の近傍 U_p 上の向きづけられた正規直

交枠 $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ で $\boldsymbol{U}_i \in \mathcal{D}_i$ を満たすものが存在する．このとき

$$V_K := \nabla_{\boldsymbol{U}_1}\boldsymbol{U}_1 + \nabla_{\boldsymbol{U}_2}\boldsymbol{U}_2 \ (= -l_2\boldsymbol{U}_1 + l_1\boldsymbol{U}_2)$$

は $(g, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ によって定まる M 上 well-defined なベクトル場である．V_K を $(M, g, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ の<u>標準的前発散</u> (canonical pre-divergence) と呼ぶ．V_K の発散を計算すると

$$\mathrm{div}(V_K) = -\boldsymbol{U}_1(l_2) + \boldsymbol{U}_2(l_1) - l_1^2 - l_2^2$$

がわかり, この右辺は (M, g) の曲率 K に等しい．よって $\mathrm{div}(V_K) = K$ を得る ([4], [6]).

θ_K は M 上の 1 形式で, 計量 g によってベクトル場 V_K に対応するものとする．このとき $\delta\theta_K = K$ が成り立つ (δ は余微分作用素). 1 形式 θ_K に対し $\omega_{21} := *\theta_K$, $\omega_{12} := -\omega_{21}$ とおき ($*$ は Hodge の $*$-作用素), θ^1, θ^2 を $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ の双対 1 形式とすると, 構造方程式

$$d\theta^1 + \omega_{21} \wedge \theta^2 = 0, \quad d\theta^2 + \omega_{12} \wedge \theta^1 = 0, \quad d\omega_{21} = K\theta^1 \wedge \theta^2$$

を得る．

(u, v) は局所座標で, $\boldsymbol{U}_1 = (1/A)\partial/\partial u$, $\boldsymbol{U}_2 = (1/B)\partial/\partial v$ を満たすものとする (A, B は正値関数)．このとき V_K の回転を計算すると, $\mathrm{rot}(V_K) = (1/AB)(\log(B/A))_{uv}$ がわかる ([4])．よって

$$d\theta_K = \mathrm{rot}(V_K)\Omega = \left(\log\left(\frac{B}{A}\right)\right)_{uv} du \wedge dv$$

(Ω は (M, g) の面積要素) は g の共形類にのみ依存することがわかる (g を g と共形的な計量に取り替えても $d\theta_K$ は変わらない)．特に上のような (u, v) として等温座標を選ぶことができることと $d\theta_K = 0$ は同値である．

3.　基本方程式　N を定断面曲率 $L_0 \in \boldsymbol{R}$ を持つ空間型とし, $\iota : M \longrightarrow N$ を M から N へのはめこみとする．M は ι に関する臍点を持たないと仮定する．g を ι によって導かれた M 上の計量とする．$\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は ι に関する M 上の主分布で M の各点での二つの主方向を与えるものとし, k_i は $\mathcal{D}_i$ に対応する ι に関する主曲率とする．このとき Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式はそれぞれ次のように表される:

$$k_1k_2 + L_0 = \mathrm{div}(V_K) \ (= K), \qquad -\boldsymbol{U}_1(k_2)\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2(k_1)\boldsymbol{U}_2 = (k_1 - k_2)V_K$$
$$(\Longleftrightarrow \ \boldsymbol{U}_2(k_1) = (k_1 - k_2)l_1, \ \boldsymbol{U}_1(k_2) = (k_1 - k_2)l_2).$$

4.　Codazzi-Mainardi 多項式　M 上 $K \neq L_0$ を仮定する．このとき Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式から, 次を得る:

$$\boldsymbol{U}_1(k_1) = -\frac{l_2}{K - L_0}k_1^3 + (\boldsymbol{U}_1(\log|K - L_0|) + l_2)k_1.$$

ここで $[\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2] = -l_1\boldsymbol{U}_1 - l_2\boldsymbol{U}_2$ が成り立つことに注意し, そしてこの左辺, 右辺それぞれを k_1 に作用させることによって, $P_{\mathrm{I}}(k_1, k_2) = 0$ を得る, 但し

$$P_{\mathrm{I}}(X_1, X_2) := c_{\mathrm{I}20}X_1^2 + c_{\mathrm{I}11}X_1X_2 + c_{\mathrm{I}02}X_2^2$$

であり,

$$
\begin{aligned}
c_{\mathrm{I}20} &:= -l_1 l_2 - \boldsymbol{U}_2(l_2) + l_2 \boldsymbol{U}_2(\log|K - L_0|),\\
c_{\mathrm{I}11} &:= 2 l_1 l_2 - \boldsymbol{U}_1(l_1) + \boldsymbol{U}_2(l_2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_1 - l_1\boldsymbol{U}_1 + l_2\boldsymbol{U}_2)(\log|K - L_0|),\\
c_{\mathrm{I}02} &:= -l_1 l_2 + \boldsymbol{U}_1(l_1) - l_1 \boldsymbol{U}_1(\log|K - L_0|)
\end{aligned}
$$

である. P_{I} は g, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ および実数 L_0 によって定まる. P_{I} を $L_0 \in \boldsymbol{R}$ に関する $(M, g, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ の (第一)Codazzi-Mainardi 多項式 と呼ぶ. $P_{\mathrm{I}} \not\equiv 0$ を仮定する. このとき $k_1 k_2 = K - L_0$ が成り立つことおよび k_1/k_2 が 2 次方程式 $c_{\mathrm{I}20}X^2 + c_{\mathrm{I}11}X + c_{\mathrm{I}02} = 0$ の解であることに注意すると, k_1, k_2 の各々は $c_{\mathrm{I}20}$, $c_{\mathrm{I}11}$, $c_{\mathrm{I}02}$ および $K - L_0$ によって表されることがわかる. また 2 次元 Riemann 多様体 (M, g) 上に二つの 1 次元分布 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ で M の任意の点で互いに直交するものが与えられたとき, もし M の任意の点 q に対し $P_{\mathrm{I},q} \equiv 0$ が成り立つならば, M の各点 p および二つの実数の組 $\left(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}\right)$ で $k_1^{(0)} k_2^{(0)} = K(p) - L_0$ を満たすものに対し p の近傍 U_p および U_p から N への等長なはめこみ ι_p で $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ が主分布を与えかつ $k_1^{(0)}$, $k_2^{(0)}$ がそれぞれ $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ に対応する p での主曲率になるようなものが存在し, このような ι_p は N の等長変換との合成を除いて一意である ([6]).

5. 平均曲率一定曲面 M 上に与えられた g, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ および M 上の滑らかな正値関数 C に対し, 次の (a)∼(d) は互いに同値である:

(a) M 上 $\mathrm{grad}(\log C) = V_K$ が成り立つ;

(b) M の各点の近傍上 $V_i := C\boldsymbol{U}_i$ は $\mathrm{div}(V_i) = \mathrm{rot}(V_i) = 0$ を満たす;

(c) M の各点の近傍上 $\partial/\partial u \in \mathcal{D}_1$, $\partial/\partial v \in \mathcal{D}_2$ および $g = (1/C^2)(du^2 + dv^2)$ を満たす等温座標 (u, v) が存在する;

(d) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ の積分曲線の測地的曲率 l_1, l_2 は $l_1 = \boldsymbol{U}_2(\log C)$, $l_2 = -\boldsymbol{U}_1(\log C)$ と表される ([6]). そして $\iota : M \longrightarrow N$ が等長なはめこみで M は ι に関する臍点を持たないならば, ι に関する平均曲率 H が定数であることと $C := (H^2 - K + L_0)^{1/4}$ に関して上の (a)∼(d) のうちの一つが成り立つことは同値である ([6]). また M 上の計量 g が実数 H_0, $L_0 \in \boldsymbol{R}$ に対し $H_0^2 - K + L_0 > 0$ を満たし M 上の二つの分布 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ が $C := (H_0^2 - K + L_0)^{1/4}$ に関して上の (a)∼(d) のうちの一つを満たすならば, M は $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ を主分布としかつ一定の平均曲率 H_0 を持つ曲面として N に局所的にかつ等長的にはめこまれ, このような曲面は主曲率 k_1, k_2 に対する条件 $k_1 > k_2$ の下で N の等長変換による像を除いて一意である. さらにこのような曲面を決定する情報として M 上の二つの 1 次元分布 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ を M の 1 点での接平面の互いに直交する二つの 1 次元部分空間 L_1, L_2 で置き換えることができ, そのとき g に課せられる条件は Lawson によって [7] において調べられた一般化された Ricci 条件である. $H_0 = 0$ である場合, 条件 $k_1 > k_2$ を除いても上のような曲面は g, L_1, L_2 によって一意に定まる ([6]).

6. 平坦な曲面 g を M 上の平坦な計量とする. このとき M が $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ を主分布とするように S^3 に局所的にかつ等長的にはめこまれることと M の各点の近傍上次の条件を満た

す関数 θ が存在することは同値である: $\theta \in (0, \pi/2)$, $l_1 = (\tan\theta)\boldsymbol{U}_2(\theta)$, $l_2 = (\cot\theta)\boldsymbol{U}_1(\theta)$ ([6]). このような θ が存在すると仮定する. このとき局所座標 (u, v) で $\boldsymbol{U}_1 = (1/\cos\theta)\partial/\partial u$, $\boldsymbol{U}_2 = (1/\sin\theta)\partial/\partial v$ を満たすものが存在する. 座標 (u, v) に関して θ は波動方程式 $\theta_{uu} = \theta_{vv}$ を満たし, また $x := (u+v)/2$, $y := (u-v)/2$ は漸近 Tschebycheff 網をなす. Codazzi-Mainardi 多項式は

$$P_{\mathrm{I}}(X_1, X_2) = \frac{4}{\sin^2 2\theta}(2(\cot 2\theta)\theta_u\theta_v - \theta_{uv})(X_1 - X_2)((\cos^2\theta)X_1 + (\sin^2\theta)X_2)$$

と表される. よって $P_{\mathrm{I}} \not\equiv 0$ を満たす S^3 の平坦な曲面の二つの主曲率の対は符号を除いて g, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ によって定まる ([6]). また平坦な計量 g および $L_0 = 1$ に対し, $P_{\mathrm{I}} \equiv 0$ を満たす分布の組 $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ が複数存在し, このような $(g, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ に対し上述の条件を満たす関数 θ が必ず存在する ([6]).

H^3 の臍点を持たない平坦な曲面についても同様の議論ができる ([6]). S^3 の場合との違いを幾つか挙げる: θ は $(0, \pi/2)$ に含まれる代わりに正値になる; $\cos\theta$, $\sin\theta$ の代わりに $\cosh\theta$, $\sinh\theta$ が現れる; 波動方程式 $\theta_{uu} = \theta_{vv}$ の代わりに Laplace 方程式 $\theta_{uu} + \theta_{vv} = 0$ が成り立つ.

7. 曲率線の族の一つが測地線からなる曲面 $\mathcal{D}_2$ の積分曲線が全て測地線であるとする. このとき $l_2 \equiv 0$ である. M が $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ を主分布とするように E^3 に局所的にかつ等長的にはめこまれることと l_1 が局所的に $l_1 = -\boldsymbol{U}_2(\log(1 + A_1A_2))$ と表されることは同値である, 但し

(a) A_1 は滑らかな関数で, $A_1 > 0$ および $\boldsymbol{U}_2(A_1) = 0$ を満たし,

(b) A_2 は滑らかな関数で,

$$\boldsymbol{U}_2(A_2) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha_1 + \alpha_2 \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \boldsymbol{U}_2(\alpha_1) = 0, \quad \boldsymbol{U}_1(\alpha_2) = 0$$

を満たす二つの滑らかな関数 α_1, α_2 が存在する

(これは [5] において得られた結果の書き換えである).

曲率線の族の一つが測地線からなる曲面の具体例としてはまず回転面が挙げられる: 回転面とその回転軸を含む平面との共通部分は回転面における測地線である. より一般に, 主方向平行曲面と呼ばれる曲面は曲率線の族の一つが測地線からなる. E^3 の曲面 S が <u>主方向平行</u> (parallel curved) であるとは, E^3 の平面 P が存在して S の各点で少なくとも一つ P に平行な主方向が存在するときにいう; S が主方向平行であるとき, P のような平面を S の <u>基平面</u> (base plane) と呼ぶ. この定義により, 回転面は主方向平行であり, その回転軸に直交する平面は基平面である. S を臍点を持たない主方向平行曲面とする. このとき基平面に平行ではない主方向を与える主分布 $\mathcal{D}_2$ の積分曲線の各々はある平面に含まれかつ S における測地線である ([1], [2]). 主方向平行曲面 S が <u>標準的</u> (canonical) であるとは, $\mathcal{D}_2$ の二つの極大な積分曲線が E^3 において合同であるときにいう. 臍点を持たない主方向平行曲面は標準的な主方向平行曲面の和集合で表される ([1], [2]).

$\iota : M \longrightarrow E^3$ ははめこみで, M は ι に関する臍点を持たないものとする. また $K \neq 0$ および $l_2 \equiv 0$ を仮定する. このとき次の (a)~(c) が成り立つ.

(a) 任意の $p \in M$ に対し, p の近傍 U_p が存在して U_p 上 $\mathcal{D}_2$ の極大な積分曲線の ι による像は E^3 において互いに合同でありかつ各々はある平面に含まれている ([5]).

(b) 次の (i)∼ (iv) は互いに同値である: (i) $\iota(U_p)$ は標準的な主方向平行曲面である; (ii) $\mathcal{D}_1$ の積分曲線の各々はある平面に含まれる; (iii) 任意の $q \in M$ に対し, $P_{\mathrm{I},q} \equiv 0$ が成り立つ; (iv) α_1 は定数である ([3], [5]).

(c) k, τ を $\mathcal{D}_1$ の各積分曲線の ι による像の空間曲線としての曲率および捩率とするとき, 次が成り立つ ([5]):

$$k = \frac{A_1}{1 + A_1A_2}, \qquad \tau = \boldsymbol{U}_1(\alpha_1).$$

C_b, C_g は曲率が零ではない E^3 の単純曲線で, 次を満たすとする: $C_b \cap C_g$ は 1 点 p_0 からなる; C_g を含む平面 P_g で, p_0 で C_b に直交するものが存在する; C_b の曲率ベクトル $\boldsymbol{k}_b$ は p_0 で C_g に接しない; p_0 で C_b, C_g の両方に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{n}_0$ は $\boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{n}_0 \neq \boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{n}_0$ を満たす, 但し $\boldsymbol{k}_g$ は C_g の曲率ベクトルである. このとき E^3 の曲面 S で次を満たすものが p_0 の周りで一意に存在する:

(a) C_b, C_g それぞれにおける p_0 の近傍 O_b, O_g が S に含まれさらにこれらは S の曲率線である;

(b) O_g と並走する S の曲率線は S における測地線である;

(c) $K \neq 0$;

(d) S は臍点を持たない

([5]). 以上から, 主方向平行曲面とは合同ではないが曲率線の族の一つが測地線からなる曲面が存在することがわかる.

参考文献

[1] N. Ando, A class of real-analytic surfaces in the 3-Euclidean space, Tsukuba J. Math., **26** (2002) 251–267.

[2] N. Ando, Parallel curved surfaces, Tsukuba J. Math., **28** (2004) 223–243.

[3] N. Ando, A two-dimensional Riemannian manifold with two one-dimensional distributions, Kyushu J. Math., **59** (2005) 285–299.

[4] N. Ando, Semisurfaces and the equations of Codazzi-Mainardi, Tsukuba J. Math., **30** (2006) 1–30.

[5] N. Ando, A surface which has a family of geodesics of curvature, to appear in Beiträge zur Algebra und Geometrie.

[6] N. Ando, The geodesic curvatures of lines of curvature, preprint.

[7] H. B. Lawson, Jr., Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math., **92** (1970) 335–374.

〒 860-8555 熊本市黒髪 2–39–1　熊本大学大学院自然科学研究科

E-mail address: ando@sci.kumamoto-u.ac.jp