アフィン対称空間内の鏡映部分多様体

坊向 伸隆 (ぼうむき のぶたか)
大阪市立大学 数学研究所 博士研究員
(大仁田義裕先生研究支援者)

1 はじめに.

鏡映部分多様体とは, 元来, リーマン多様体内に於いて定義された概念である. 本報告書では, その概念を拡張し アフィン多様体内に鏡映部分多様体を定義している. 特に 全空間をアフィン対称空間とした場合, その鏡映部分多様体としてどの様な例が存在するのかを考察する.

謝辞. 私を研究支援者にして下さった大仁田義裕先生へ心からの感謝を申し上げます.

2 定義など.

鏡映部分多様体の概念を拡張するにあたり, まずは Leung により紹介された (元来の) 定義を復習する (cf. [L]).

定義 1. (M, g) を完備・連結リーマン多様体とし, σ を (M, g) の回帰的等長変換とする. その時, σ の固定点集合 M_σ の連結成分 L を**鏡映部分多様体**と呼ぶ. ただし $M_\sigma := \{p \in M \mid \sigma(p) = p\}$.

上で定義された鏡映部分多様体 L は, もし $M_\sigma \neq \emptyset$ ならば, 計量 g から定まるリーマン接続 ∇^{g} に関して (M, ∇^{g}) 内の全測地的部分多様体となる (cf. [K-N, Vol.II]).[1] その事からも鏡映部分多様体は興味深い研究対象である. さて, σ が (M, g) の等長変換であることから, 以下が成立していることに注意する:

$$(*) \qquad \sigma_*\big(\nabla^{\mathrm{g}}{}_X Y\big) = \nabla^{\mathrm{g}}{}_{(\sigma_* X)}(\sigma_* Y) \qquad \text{for } \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

[1] 全測地的部分多様体の定義は [K-N, Vol.I, pp. 180] に従っている.

つまり, σ は接続 $\nabla^{\mathfrak{g}}$ に関してアフィン変換となっている. この等式 $(*)$ に着目し アフィン多様体内の鏡映部分多様体を次で定義する:

定義 2. (M,∇) を完備・連結アフィン多様体とし, σ を (M,∇) の回帰的アフィン変換とする. その時, σ の固定点集合 M_σ の連結成分 L を**鏡映部分多様体**と呼ぶ.

この様に定義した鏡映部分多様体 L に対しても, 定義 1 の場合と同様に, 次が成立する: もし $M_\sigma \neq \emptyset$ ならば, L は (M,∇) 内の全測地的部分多様体となる (cf. [K-N, Vol.II]).

約束事項 3. 以後, 鏡映部分多様体と云えば 定義 2 を満足するものとする.

ここで, 上で定義した鏡映部分多様体の例を挙げておく.

例 4 $(SL(2,\mathbb{R}),\nabla^{\mathfrak{g}'})$ **内の鏡映部分多様体.** $SL(2,\mathbb{R})$ で 実 2 次特殊線形群を, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ で跡零なる実 2 次行列全体を表す. そして, リー群 $SL(2,\mathbb{R})$ の左不変ベクトル場全体がなすリー代数を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ と同一視する. 今から $SL(2,\mathbb{R})$ 内の鏡映部分多様体を構成する. そのために次の 2 つの準備をしよう: (1) 全空間 $(SL(2,\mathbb{R}),\nabla^{\mathfrak{g}'})$ の構成, (2) $(SL(2,\mathbb{R}),\nabla^{\mathfrak{g}'})$ の回帰的アフィン変換 σ の構成. まずはこれらの準備から始める.

$\boxed{\text{準備 (1) 全空間 } (SL(2,\mathbb{R}),\nabla^{\mathfrak{g}'}) \text{ の構成}}$ 符号数 $(1,2)$ の擬リーマン計量 $\mathfrak{g}'$ を $SL(2,\mathbb{R})$ の単位行列 e に於いて

$$\mathfrak{g}'_e(X_e,Y_e) := B_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}(X,Y) \qquad \text{for } X,Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$$

で定義し (ただし $B_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ のキリング形式を表す), それを $SL(2,\mathbb{R})$ 上の左不変計量 $\mathfrak{g}'$ に拡張する. その時, $(SL(2,\mathbb{R}),\mathfrak{g}')$ は連結・擬リーマン多様体となる. この擬リーマン計量 $\mathfrak{g}'$ から, Koszul formula を用いて, $SL(2,\mathbb{R})$ 上の (擬) リーマン接続 $\nabla^{\mathfrak{g}'}$ を定義する. すると, $(SL(2,\mathbb{R}),\nabla^{\mathfrak{g}'})$ は完備・連結アフィン多様体となる.

$\boxed{\text{準備 (2) } (SL(2,\mathbb{R}),\nabla^{\mathfrak{g}'}) \text{ の回帰的アフィン変換 } \sigma \text{ の構成}}$ リー群 $SL(2,\mathbb{R})$ の回帰的自己同型写像 σ を次で定義する:

$$\sigma:\ A \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{for } A \in SL(2,\mathbb{R}).$$

これは $(SL(2,\mathbb{R}),\mathfrak{g}')$ の回帰的等長変換になる. 故に, σ は $(SL(2,\mathbb{R}),\nabla^{\mathfrak{g}'})$ の回帰的アフィン変換である.

以上の準備の下で, σ の固定点集合 $SL(2,\mathbb{R})_\sigma$ は $SO(1,1)$ となる. よって, その連結成

分は

$$\begin{cases} SO_0(1,1), \\ \\ \left\{ \begin{pmatrix} -e^t & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{cases}$$

従って, 上記2つの集合がアフィン多様体 $(SL(2,\mathbb{R}), \nabla^{g'})$ 内の, σ に関する, 鏡映部分多様体である. 尚, これらは $(SL(2,\mathbb{R}), \nabla^{g'})$ のアフィン変換で互いに写り合うことが出来る.

注意 5. 例 4は 次のことを群論的に実証している: 3次元 反ド・ジッター空間内の空間的測地線が全測地的部分多様体となっている.

3 アフィン対称空間内の鏡映部分多様体の例.

第2章に於いて, アフィン多様体内に鏡映部分多様体を定義した. この章では 特に, 全空間をアフィン対称空間とした場合 その鏡映部分多様体としてどの様な例が存在しているのかを考察する.

まず, アフィン対称空間の定義を復習しよう (cf. [N]).

定義 6. G を連結リー群とし, H を G の閉部分群とする. この時, 商空間 G/H が**アフィン対称空間**であるとは 次を満たすときを云う. $\exists\, \tilde{\sigma}$:リー群 G の回帰的自己同型写像 such that $(G_{\tilde{\sigma}})_0 \subset H \subset G_{\tilde{\sigma}}$. ただし $(G_{\tilde{\sigma}})_0$ は $G_{\tilde{\sigma}} = \{g \in G \,|\, \tilde{\sigma}(g) = g\}$ の単位連結成分を表す.

注意 7 & 約束事項 8. アフィン対称空間 $(G/H, \tilde{\sigma})$ 上に, G/H の回帰的微分同型写像 σ が不変となる G-不変アフィン接続 ∇_1 が一意に定まる (cf. [K-N, Vol.II]). ただし, σ は次で定義されている

$$\sigma : gH \mapsto \tilde{\sigma}(g)H.$$

この接続 ∇_1 を G/H 上の**標準接続**と呼ぶ (cf. [K-N, Vol.II]). 以後, アフィン対称空間 G/H 上には標準接続 ∇_1 が与えられていると仮定する.

注意 9. アフィン対称空間 $(G/H, \nabla_1)$ 内の鏡映部分多様体 $L \neq \emptyset$ に対して, 次の条件 (i), (ii) のいずれか一つが成立すれば L 自身もアフィン対称空間となる: (i) 全測地的部分多様体 L は $(G/H, \nabla_1)$ からの誘導接続に関して完備である (cf. [K-N, Vol.II]). (ii) G が半単純であり かつ G/H 上に効果的に作用している.

次に, 命題 10 を与えよう.

命題 10. $(G/H, \tilde{\sigma}, \nabla_1)$ をアフィン対称空間とする. そして, $H = (G_{\tilde{\sigma}})_0$ または $H = G_{\tilde{\sigma}}$ と仮定する. この時, $\forall\, \tilde{\eta}$:リー群 G の回帰的自己同型写像 with $\tilde{\sigma} \circ \tilde{\eta} = \tilde{\eta} \circ \tilde{\sigma}$ に対して, η は $(G/H, \nabla_1)$ の回帰的アフィン変換となる. ただし η は次で定義されている

$$\eta : gH \mapsto \tilde{\eta}(g)H.$$

注意 11. G または G/H のいずれかが単連結ならば, 命題 10 の仮定「$H = (G_{\tilde{\sigma}})_0$ または $H = G_{\tilde{\sigma}}$」は成立する.

命題 10 を用いることにより, アフィン対称空間内の鏡映部分多様体の例を得ることが可能である. 例えば,

例 12. アフィン対称空間 $E_{6(-14)}/\big(SO_0(8,2) \times SO(2)\big)$ 内の鏡映部分多様体として次が存在している: (a) $SU(4,2)/S\big(U(2,2) \times U(2)\big)$, (b) $F_{4(-20)}/SO_0(8,1)$.

例 12 の補足説明. (I) 全空間 $E_{6(-14)}/\big(SO_0(8,2) \times SO(2)\big)$ は擬ケーラー等質空間の構造を持つ. その構造に関して, (a) は複素全測地的部分多様体となり, (b) はラグランジェ全測地的部分多様体となっている. (II) 1984 年に竹内 [T] はエルミート対称空間内の (その全空間に対する) 半分次元をもつ全実全測地的部分多様体を与えた. 上の (b) は擬エルミート対称空間内のそれに相当する. よって, (b) は竹内の結果の一つの一般化と云える.

例 13. アフィン対称空間 $SL(n,\mathbb{H})/S\big(GL(j,\mathbb{H}) \times GL(n-j,\mathbb{H})\big)$ 内の鏡映部分多様体として次が存在している: (c) $Sp(n)/\big(Sp(j) \times Sp(n-j)\big)$, (d) $SL(n,\mathbb{C})/S\big(GL(j,\mathbb{C}) \times GL(n-j,\mathbb{C})\big)$.

例 13 の補足説明. (I) 全空間 $SL(n,\mathbb{H})/S\big(GL(j,\mathbb{H}) \times GL(n-j,\mathbb{H})\big)$ はパラ・ケーラー等質空間の構造を持つ. その構造に関して, (c) はラグランジェ全測地的部分多様体となり, (d) はパラ複素全測地的部分多様体となっている.[2] (II) リーマン対称空間に於いて, 非コンパクト型リーマン対称空間は各点での断面曲率が零以下となる. これを考慮に入れると, 非コンパクト型リーマン対称空間内にコンパクト・リーマン対称空間が全測地的部分多様体として存在することは, トーラスを除くと, ありえない. その結果, (c) は鏡映部分多様体をアフィン多様体内に拡張定義することで得られた例と云える. (III) コンパクト Clifford-Klein 形の存在・非存在問題に対して (cf. [K-Y]), 全空間 $SL(n,\mathbb{H})/S\big(GL(j,\mathbb{H}) \times GL(n-j,\mathbb{H})\big)$ にはコンパクト Clifford-Klein 形が存在しない. しかしながら, その全測地的部分多様体 (c) $Sp(n)/\big(Sp(j) \times Sp(n-j)\big)$ には存在している. 従って (c) は, コンパクト Clifford-Klein

[2] 全空間 $SL(n,\mathbb{H})/S\big(GL(j,\mathbb{H}) \times GL(n-j,\mathbb{H})\big)$ と 部分多様体 (d) $SL(n,\mathbb{C})/S\big(GL(j,\mathbb{C}) \times GL(n-j,\mathbb{C})\big)$ は共にパラ複素構造をもつ (ref. [K-K]). その構造に関して, $SL(n,\mathbb{C})/S\big(GL(j,\mathbb{C}) \times GL(n-j,\mathbb{C})\big)$ から $SL(n,\mathbb{H})/S\big(GL(j,\mathbb{H}) \times GL(n-j,\mathbb{H})\big)$ への包含写像がパラ正則となっている. その事から, パラ複素部分多様体と記述している.

形の存在・非存在問題を接続に関する議論のみでは解決出来ないのではないか？という事を示唆する例となる.

注意 14. 例 12 と例 13 で記載されている空間全てはリー代数的に定まっている.

余談. アフィン対称空間内には, 上に挙げた例のみならず, 興味深い鏡映部分多様体が多数存在している. その事からも, 私はアフィン対称空間内の鏡映部分多様体について理解を深めたいと考えている.

参考文献

[B] M. Berger, *Les espaces symétriques noncompacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74**(1957), 85–177.

[H] S. Helgason, "Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces," American Mathematical Society: Providence-Rhode Island, 2001.

[K-K] S. Kaneyuki and M. Kozai, *Paracomplex structures and affine symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **8**(1985), 81–98.

[K-N, Vol.I] S. Kobayashi and K. Nomizu, "Foundations of differential geometry I," Interscience Publishers: New York-London, 1963.

[K-N, Vol.II] S. Kobayashi and K. Nomizu, "Foundations of differential geometry II," Interscience Publishers: New York-London-Sydney, 1969.

[K-Y] T. Kobayashi and T. Yoshino, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces–revisited*, Pure and Applied Mathematics Quarterly **1**(2005), 591–663.

[L] D. S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geom. **8**(1973), 153–160.

[N] K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76**(1954), 33–65.

[O] B. O'Neill, "Semi-riemannian geometry," Academic Press: New York, 1983.

[T] M. Takeuchi, *Stabiblity of certain minimal submanifolds of compact hermitian symmetric spaces*, Tôhoku Math. J. **36**(1984), 293–314.