# ハミルトン微分同相群およびその等質空間上の Hofer 幾何について

入江 博

東京電機大学工学部

本稿では, ハミルトン微分同相群およびその等質空間であるハミルトン同位なラグランジュ部分多様体のなす空間上の Hofer 幾何について, 特に Hofer 計量に関する測地線の特徴づけに焦点を絞って解説する.

第 1 節では, ハミルトン微分同相群とその上の Hofer 計量を定義し, 第 2 節でこの計量に関する測地線の特徴づけを与えた Lalonde と McDuff の結果 [4] を紹介する. 第 3 節で乙藤隆史氏 (日本大学工学部) との共同研究 [2] により得られた, ハミルトン同位なラグランジュ部分多様体のなす空間上の Hofer 計量に関する測地線の特徴づけを述べる. また, その意義について最も簡単な例を用いて説明する.

## 1 ハミルトン微分同相群上の Hofer 計量

$(M, \omega)$ を境界をもたないシンプレクティック多様体とする. コンパクトな台をもつハミルトン関数 $H_t(p) := H(t, p) \in C_0^\infty([0,1] \times M)$ に対して,

$$\omega(X_{H_t}, \cdot) = dH_t$$

により時間依存するハミルトンベクトル場 $X_{H_t} \in \mathfrak{X}(M)$ が定まる. そのフロー $\{\varphi_t^H\}_{0 \leqq t \leqq 1}$ を**ハミルトンイソトピー**という. $M$ の微分同相 $\psi \in \mathrm{Diff}(M)$ は, あるハミルトンイソトピー $\{\varphi_t^H\}$ が存在して, $\psi = \varphi_1^H$ と書けるとき, **ハミルトン微分同相**という. ハミルトン微分同相の全体は $\mathrm{Diff}(M)$ の部分群をなし, **ハミルトン微分同相群**という. $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ と表す.

$\mathrm{Ham}(M, \omega)$ 上の曲線 $\{\psi_t\}_{0 \leqq t \leqq 1}$ は, ハミルトン関数 $H$ に対して, 方程式

$$\psi_t \circ \psi_0^{-1} = \varphi_t^H$$

をみたすものとして定義される. $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ は群であるから, 単位元 $id$ から出発する曲線のみを考えれば十分である. 以下, この場合のみ考える. $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ の Lie 環 $C_0^\infty(M)$ 上に $\max_M f - \min_M f$ なるノルムを定めることにより, 曲線 $\{\varphi_t^H\}_{0 \leqq t \leqq 1} \subset \mathrm{Ham}(M, \omega)$ の **Hofer 長さ**は,

$$l(\{\varphi_t^H\}) = \int_0^1 \left( \max_{p \in M} H(t,p) - \min_{p \in M} H(t,p) \right) dt$$

と定義される. Hofer [1] は, さらに $\psi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ のセミノルム $||\psi||$ を次のように定義した:

$$||\psi|| = \inf_{H:\varphi_1^H=\psi} l(\{\varphi_t^H\}).$$

このセミノルムが実際にノルムを定めることが, 標準的なシンプレクティック構造をもつ $\mathbb{R}^{2n}$ の場合には, Hofer [1] により $\mathbb{R}^{2n}$ のループ空間の変分問題の手法で示された. 一般のシンプレクティック多様体の場合には, 概正則曲線の方法により, Polterovich の貢献 [7] を経て最終的に Lalonde と McDuff [3] が肯定的に解決した.

**注 1.** 任意の2点 $\psi, \varphi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ に対し, $d(\psi,\varphi) = ||\psi^{-1}\varphi||$ とおくと, $d$ は $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 上の距離になる. この距離を **Hofer 距離**という.

## 2 Hofer 計量に関する測地線

Hofer 計量の測地線を定義する方法はいくつか考えられるが, ここでは長さ関数の極値を与える曲線として定義する.

$\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 上の曲線 $\{\psi_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ の**変分** $\{\psi_{s,t}\}$ とは, 任意の $t \in [0,1], s \in I$ に対して

$$\psi_{s,0} = \psi_0, \quad \psi_{s,1} = \psi_1, \quad \psi_{0,t} = \psi_t$$

をみたすものをいう. いま $id$ を始点とする曲線 $\psi_t = \varphi_t^H$ を考えているので, $\{\psi_{s,t}\}$ の長さ $l(s)$ は,

$$l(s) = l(\{\psi_{s,t}\}) = \int_0^1 \left( \max_{p\in M} H(s,t,p) - \min_{p\in M} H(s,t,p) \right) dt$$

となる. ここで, $H(s,t,p)$ は各 $s \in I$ に対して曲線 $\{\psi_{s,t}\}_{0\leqq t\leqq 1}$ を生成するハミルトン関数である.

この $l(s)$ は一般に微分可能ではないが, $l(s)$ を凸関数で近似することにより, 広義の「極値」の概念が定義できる (詳しくは [8] を参照). 曲線 $\{\varphi_t^H\}$ が**測地線 ($l$-critical)** であるとは, $\{\varphi_t^H\}$ の任意の変分に対して, 関数 $l(s)$ が $s=0$ で「極値」をもつことである. そして, 測地線は次のようにハミルトン関数の言葉で完全に特徴付けられる.

**定理 2 (Lalonde-McDuff [4], Polterovich [8]).** $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 内の曲線 $\{\varphi_t^H\}_{0\leqq t\leqq 1}$ が測地線であるための必要十分条件は, $M$ 上の 2 点 $p_+, p_-$ であって, 任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$\max_{p\in M} H(t,p) = H(t,p_+), \quad \min_{p\in M} H(t,p) = H(t,p_-)$$

をみたすものが存在することである.

**例 3.** 2次元球面 $S^2$ の北極 $N$ と南極 $S$ を通る軸に関する一定速度の回転を考える. この回転を生成するハミルトン関数は軸の方向の高さ関数 (の定数倍) であり, $p_+ = N, p_- = S$ で上の定理の条件をみたす. よって, この回転は $\mathrm{Ham}(S^2, \omega_{std})$ の測地線である.

**注 4.** 定理 2 について, $l(s)$ が微分可能な場合 *(*このような曲線 $\{\varphi_t^H\}$ は**非退化**であるという*)* については, Ustilovsky による先行研究 [6] がある. Ustilovsky はさらに第二変分まで計算し, 非退化測地線の安定性について議論している.

# 3 ラグランジュ部分多様体のなす空間の場合

$(M,\omega)$ 内の閉ラグランジュ部分多様体 $L$ に対し, $L$ とハミルトン同位な閉ラグランジュ部分多様体の集合 $\mathcal{L}(M,\omega,L)=\{\psi(L)|\ \psi\in \mathrm{Ham}(M,\omega)\}$ を考える. これが $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ の等質空間であることから, $\mathcal{L}(M,\omega,L)$ 上の曲線 $\{L_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ に対して, その長さ $l(\{L_t\})$ を $\{L_t\}$ の $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ への持ち上げ, つまり, $L_t=\varphi_t^H(L)$ となる $\{\varphi_t^H\}$ の Hofer 長さの下限として定義できる:

$$\begin{aligned} l(\{L_t\}) &= \inf_{H:L_t=\varphi_t^H(L)} \int_0^1 \left(\max_{p\in M} H(t,p) - \min_{p\in M} H(t,p)\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\max_{p\in L_t} H(t,p) - \min_{p\in L_t} H(t,p)\right) dt. \end{aligned}$$

曲線 $\{L_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ の変分も第 2 節と同様に定めることにより, その長さ関数の「極値」として測地線の概念が定義できる (詳しくは [2] を参照). 次の結果は乙藤氏との共同研究により得られたものである.

**定理 5 (入江-乙藤 [2]).** $\mathcal{L}(M,\omega,L)$ 内の曲線 $L_t=\varphi_t^H(L)$ が測地線であるための必要十分条件は, $\cap_t\varphi_t^H(L)$ 上の 2 点 $p_+,p_-$ であって, 任意の $t\in[0,1]$ に対して

$$\max_{p\in L_t} H(t,p) = H(t,p_+), \quad \min_{p\in L_t} H(t,p) = H(t,p_-)$$

をみたすものが存在することである.

この定理から次のことがすぐわかる.

**系 6.** 2 つの閉ラグランジュ部分多様体 $L_0,L_1\in\mathcal{L}(M,\omega,L)$ が $M$ 内で共通部分をもたなければ, $L_0$ と $L_1$ を $\mathcal{L}(M,\omega,L)$ の測地線で結ぶことはできない.

例 3 で考えた 2 次元球面 $S^2$ の回転 $\{\varphi_t^H\}_{0\leqq t\leqq 1}$ を再考する. ハミルトン関数 $H$ は, $S^2$ が時刻 1 でちょうど半回転になるように調整しておく. いま回転軸を通る $(N,S$ を通る$)$ 大円を $L_0$, 回転軸に平行な平面に含まれる小円をひとつ取ってそれを $L$ と表す.

この状況で, $L\cap\varphi_1^H(L)=\phi$ となるので, 系 6 により $L$ と $\varphi_1^H(L)$ は空間 $\mathcal{L}(S^2,\omega_{std},L)$ 内で測地線によって結ぶことはできない。このような例はほかにいくらでも作ることができるので, リーマン幾何と比較すると, 距離空間 $(\mathcal{L}(S^2,\omega_{std},L),d)$ のトポロジーがかなり複雑であることが推察できる.

一方, 大円の場合には $\mathcal{L}(S^2,\omega_{std},L_0)$ の曲線 $L_t=\varphi_t^H(L_0)$ は定理 4 の条件をみたすので測地線である.

Lalonde と McDuff が $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ の測地線の系統的な研究を行った目的のひとつは $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ の Hofer 距離 $d$ に関する直径を調べることであった (cf. [5]). 例えば, $S^2$ の場合には次の結果がある.

**定理 7 (Polterovich [9]).** $\mathrm{Ham}(S^2,\omega_{std})$ の Hofer 距離に関する直径は $\infty$ である.

Polterovich は, 実際に Hofer ノルムがいくらでも大きくなるような $\mathrm{Ham}(S^2,\omega_{std})$ の path を具体的に構成することにより, この定理を得ている. しかし, Polterovich が構成した path は $\mathcal{L}(S^2,\omega_{std},L_0)$ においてはちょうどイソトロピー部分群のなかに入っており, 空間 $\mathcal{L}(S^2,\omega_{std},L_0)$ の直径の情報を何も与えてはいない. このあたりにハミルトン微分同相群 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ とその等質空間 $\mathcal{L}(M,\omega,L)$ との Hofer 幾何の違いが出てくる. 両者の距離空間としての構造がどのくらい違うかを調べることは, 興味深い問題であると思われる. 最後に, 具体的な問題をひとつ述べる.

**問題 8.** $\mathcal{L}(S^2,\omega_{std},L_0)$ および $\mathcal{L}(S^2,\omega_{std},L)$ の Hofer 距離に関する直径は有限か無限か.

# 参考文献


[1] Hofer, H.: On the topological properties of symplectic maps. Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. **115**A, 25-38 (1990)

[2] Iriyeh, H., Otofuji, T: Geodesics of Hofer's metric on the space of Lagrangian submanifolds. To appear in manuscripta math. (arXiv:mathSG/0608082)

[3] Lalonde, F., McDuff, D.: The geometry of symplectic energy. Ann. Math. **141**, 349-371 (1995)

[4] Lalonde, F., McDuff, D.: Hofer's $L^\infty$-geometry: energy and stability of Hamiltonian flow, I. Invent. Math. **122**, 1-33 (1995)

[5] Lalonde, F., McDuff, D.: Hofer's $L^\infty$-geometry: energy and stability of Hamiltonian flow, II. Invent. Math. **122**, 35-69 (1995)

[6] Ustilovsky, I.: Conjugate points on geodesics of Hofer's metric. Diff. Geom. Appli. **6**, 327-342 (1996)

[7] Polterovich, L.: Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **13**, 357-367 (1993)

[8] Polterovich, L.: The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphisms. Lectures in Math, ETH, Birkhauser, 2001.

[9] Polterovich, L.: Hofer's diameter and Lagrangian intersections. Internat. Math. Research Notices **4**, 217-223 (1998)

H. Iriyeh
School of Engineering
Tokyo Denki University
Kanda-Nishiki-Cho, Chiyoda-Ku
Tokyo, 101-8457
Japan
*e-mail* : hirie@im.dendai.ac.jp