複素空間形の極小部分多様体について

昆　万佑子（北海道大学）

M は，正則断面曲率 c を持つ m 次元複素空間形 $M^m(c)$ にはめ込まれた実 n 次元部分多様体とする．$M^m(c)$ のフビニ・スタディ計量を g とし，g から M 上に誘導されたリーマン計量も g で表す．$\tilde{\nabla}$ を $M^m(c)$ の共変微分とし，∇ を誘導計量によって定まる M の共変微分とする．ガウスとワインガルテンの公式は次のように与えられる．

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y), \qquad \tilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X V.$$

A，B は M の第二基本形式であり，$g(B(X,Y),V) = g(A_V X, Y)$ を満たす．

M の接ベクトル場 X, M の法ベクトル場 V に対し，以下のように P, F, t, f を定める．

$$JX = PX + FX \qquad (PX \in TM, \quad FX \in TM^{\perp}),$$

$$JV = tV + fV \qquad (tV \in TM, \quad fV \in TM^{\perp}).$$

定義 1. ケーラー多様体 $\tilde{M}$ の部分多様体 M 上に可微分な分布 $\mathcal{D} : x \longrightarrow \mathcal{D}_x \subset T_x(M)$ が存在し，以下の条件を満たすとき，M は $\tilde{M}$ の CR 部分多様体であるという．

(i) $\mathcal{D}$ は正則, すなわち M の各点 x で $J\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x$.

(ii) $\mathcal{D}^{\perp} : x \longrightarrow \mathcal{D}^{\perp}_x \subset T_x(M)$ が反不変, すなわち，M の各点 x で $J\mathcal{D}^{\perp}_x \subset T_x(M)^{\perp}$.

$c = 4$ のとき，複素射影空間 CP^m の極小 CR 部分多様体について，以下の結果が得られた.

定理 1.　M を CP^m 内の法接続が平坦な実 n 次元コンパクト極小 CR 部分多様とする．M の各点で，M の断面曲率 K が $K \geq 1/n$ を満たすとき，M は geodesic hypersphere である．

また，$c > 0$ であるとき，複素空間形 $M^m(c)$ の平均曲率ベクトル場が平行な部分多様体に対して，第二基本形式に関する Simons 型の積分公式を得た．

$\{e_i\}, \{v_a\}$ をそれぞれ M の接空間，法空間の正規直交基底とし，$A_{v_a} = A_a$, $A_{fv_a} = A_{fa}$ と表す.

H_a $(a=1,\cdots,p)$ を以下で与えられる $(n+1,n+1)$ 行列とする．

$$H_a=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \mu_1^a \\ & A_a & & \vdots \\ & & & \mu_n^a \\ \hline \mu_1^a & \ldots & \mu_n^a & 0 \end{array}\right),$$

ここで，$\mu_i^a=-\frac{\sqrt{c}}{2}g(tv_a,e_i)$.

定理 2. M を $M^m(c)$, $c>0$ の，平均曲率ベクトル場が平行な実 n 次元コンパクト部分多様体とする．このとき，次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned}&\int_M\Big(|\nabla A|^2-\frac{c^2}{8}(\sum_{a,i}g(Pe_i,Pe_i)g(tv_a,tv_a)+\sum_i g(FPe_i,FPe_i))\\&+\frac{3c}{4}\sum_a(\mathrm{tr}A_{fa}^2+|[P,A_a]|^2-4\mathrm{tr}A_aA_{fa}P)+\frac{3c^2}{4}\sum_i g(FPe_i,FPe_i)\Big)\\&=\int_M\Big(\sum_{a,b}|[H_a,H_b]|^2+\sum_{a,b}(\mathrm{tr}H_aH_b)^2-\frac{c}{4}(n+1)\sum_a\mathrm{tr}H_a^2\\&+\frac{c}{4}\sum_a(\mathrm{tr}H_a)^2-\sum_{a,b}\mathrm{tr}H_b\mathrm{tr}H_a^2H_b+\sum_{a,b}\mathrm{tr}H_b\mathrm{tr}((H_aH_b-H_bH_a)H_aE)\Big).\end{aligned}$$

ここで，

$$E=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

この積分公式を用いて，以下の結果が得られる．

定理 3. M を $M^m(c)$, $c>0$ の実 n 次元コンパクト極小部分多様体とする.

$$|A|^2\leq\frac{c}{4}\Big(\frac{n+1}{2-1/p}-2p\Big),$$

ならば，M は $M^m(c)$ の複素部分多様体であるか，実超曲面である.