$SU(2)$ 不変交代形式について

間下克哉 (東京農工大学)

$\mathcal{C}$ をケイリー数体とし $\mathcal{C}_0$ で純虚ケイリー数の全体を表わす．$\mathcal{C}_0$ 上には **assocative calibration** と呼ばれる $G_2 = Aut(\mathcal{C})$ で不変な交代３形式

$$\varphi(x,y,z) = \langle xy, z\rangle$$

が存在する．

６次元球面 $S^6 = G_2/SU(3)$ 上にはケイリー数の積を用いて概複素構造 J が定められるが，S^6 の２次元部分多様体 N 上の錐が φ により calibrate されることと N が J-不変部分多様体であることとは同値である．とくに第３標準極小はめ込みの像 $P^2 \subset S^6$ 上の円錐はホモロジー類中で体積最小であることがわかる．ここで $P^2 \subset S^6$ 上の錐の体積最小性を示すためには φ が $SO(3)$-不変であることだけが必要である．そこで，

V を $SO(3)$ の実既約表現とし V 上の $SO(3)$-不変交代形式を探す

ことを考えて見た．

$SO(3)$ の実既約表現について簡単に復習しておく．

d を正の整数とするとき，$V(d)$ を z, w の斉 d-次多項式の全体とすると $SU(2)$ は $V(d)$ に既約に働き，$SU(2)$ の $(d+1)$-次元複素既約表現は $V(d)$ に同型である．d を偶数とするとき，$V(d)$ 上に共役線形 (conjugate linear) な $SU(2)$ 同型写像 j が存在し j の 1（または (-1)）-固有空間は $SO(3)$ の実既約表現になる．$SO(3)$ の実既約表現はすべてこの方法により得られる．

$SO(3)$ の不変交代形式を探す（具体的表示を得る）ためには

(1) $\bigwedge^p V(d)$ 内の $SU(2)$ 不変元 ξ を探す

(2) $j(\xi)$ を書き下す

を行えばよい．

$\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})=\mathfrak{so}(3)^{\mathbf{C}}$ の基底

$$H=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, X_+=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, X_-=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

をとる．$U_i\subset\bigwedge^p V(d)$ を ad_H の固有値 $2i$ に対する固有空間とすると，$SU(2)$ の既約表現のウェイトは全て１次元であることから，$\bigwedge V(d)$ 内の $SU(2)$-不変元の全体は

$$ad_{X_-}:U_0\to U_{-1}$$

の核である．このことから次が容易に次がわかる．

Proposition 1 $d=2d'(>0)$ を偶数とし $V_0(d)$ を $SO(3)$ の d-次元実既約表現とする．$\bigwedge^p V_0(d)$ 内の $SO(3)$-不変元の全体のなす線形空間の次元は

$$\begin{aligned}&\#\{(i_1,\cdots,i_p):0\le i_1<\cdots<i_p\le d+1,\ i_1+\cdots+\imath_p=2pd\}\\ -\ &\#\{(i_1,\cdots,i_p):0\le i_1<\cdots<i_p\le d+1,\ i_1+\cdots+\imath_p=2pd-2\}\end{aligned}$$

で与えられる．

不変３形式について考えよう．

命題１より不変３形式全体のなす空間の次元は $d=6$ のとき 1, $d=8$ のとき 0, $d=10$ のとき 1 であることがわかる．$d=6$ のときは不変３形式の具体的表示はわかっている（associative calibration の定数倍）ので，$d=10$ の場合について計算してみた．$d=10$ の場合の不変３形式は次の形である．

$$\begin{aligned}c(&5v_{10}\wedge v_4\wedge v_1+5v_9\wedge v_6\wedge v_0-10v_{10}\wedge v_3\wedge v_2-10v_8\wedge v_7\wedge v_0\\&+25v_9\wedge v_4\wedge v_2+25v_8\wedge v_6\wedge v_1-100v_8\wedge v_4\wedge v_3-100v_7\wedge v_6\wedge v_2\\&-v_{10}\wedge v_5\wedge v_0+15v_8\wedge v_5\wedge v_2-20v_9\wedge v_5\wedge v_1+160v_7\wedge v_5\wedge v_3\\&-280v_6\wedge v_5\wedge v_4)\end{aligned}$$

基底 $v_0,\cdots,v_{10}$ の $\mathbf{R}^{11}$ の正規直交基底 $e_0,\cdots,e_{10}$ による表示

$$v_0=\tfrac{1}{\sqrt{2_{10}C_0}}(e_9+\sqrt{-1}e_{10}),\quad v_{10}=\frac{1}{\sqrt{2_{10}C_{10}}}(e_9-\sqrt{-1}e_{10}),$$

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2_{10}C_1}}(e_7 + \sqrt{-1}e_8), \quad v_9 = \frac{1}{\sqrt{2_{10}C_9}}(-e_7 + \sqrt{-1}e_8),$$
$$\cdots$$
$$v_4 = \tfrac{1}{\sqrt{2_{10}C_4}}(e_1 + \sqrt{-1}e_2), \quad v_6 = \frac{1}{\sqrt{2_{10}C_6}}(e_1 - \sqrt{-1}e_2),$$
$$v_5 = \tfrac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{_{10}C_5}}e_0$$

を用いて次を得る.

Proposition 2 $V_0(10)$ を $SO(3)$ の *11*次元実既約表現とする. $\bigwedge^3 V_0(10)$ 内の $SO(3)$-不変元は次のものに限る.

$$c\Bigg(-\frac{1}{2\cdot 3^2\sqrt{7}}e_0\wedge e_5\wedge e_6 + \frac{2}{3^2\sqrt{7}}e_0\wedge e_1\wedge e_2 + \frac{2}{3^2\sqrt{7}}e_0\wedge e_3\wedge e_4$$
$$-\frac{1}{2\cdot 3\sqrt{3}}\left(e_3\wedge e_5\wedge e_9 - e_4\wedge e_6\wedge e_9 + e_3\wedge e_6\wedge e_{10} + e_4\wedge e_5\wedge e_{10}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{5}}{2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3\cdot 7}}\left(-e_1\wedge e_5\wedge e_7 + e_2\wedge e_6\wedge e_7 - e_2\wedge e_5\wedge e_8 - e_1\wedge e_6\wedge e_8\right)$$
$$-\frac{\sqrt{5}}{3^2\sqrt{2\cdot 7}}\left(e_1\wedge e_3\wedge e_5 - e_2\wedge e_4\wedge e_5 + e_2\wedge e_3\wedge e_6 + e_1\wedge e_4\wedge e_6\right)\Bigg)$$