対称性をもつ presymplectic 多様体の幾何

野田　知宣

大阪大学大学院理学研究科 ＆ 大阪市立大学数学研究所

1. Introduction

本稿において presymplectic 多様体に対する運動量写像と簡約を考察する。presymplectic 構造は時間依存 Hamiltonian を考えると自然に現れる。実際 (P, ω_P) を symplectic 多様体、H を時間依存 Hamiltonian とする。いま $M := M \times \mathbb{R}$、$\omega := \mathrm{pr}_1^* \omega_P$ とすると (M, ω) は presymplectic 多様体である。

(M, ω) を階数一定、r とする、の presymplectic 多様体とする。各 $p \in M$ の接空間の部分空間を $D_p := \{X \in T_pM\ ;\ i(X)\omega = 0\}$ で定め、$D = \bigcup_{p \in M} D_p$ と置くと D は M 上の可積分な接分布と定める。N でこの接分布の積分多様体、M/N で D の定める M の葉層構造の leaf space を表す。M/N は presymplectic 力学系における物理状態のモジュライ空間と見做せる（4 節参照）。一般に M/N は多様体構造を許容しない。ここではこの M/N 上での symplectic 幾何学、特に運動量写像と簡約に係る部分を考察する。M 上での簡約については Echeverría-Enríquez, Muñoz-Lecanda and Román-Roy [8] 参照。

2. M/N の幾何学

(M, ω) を presymplectic 多様体とする。$p \in M$ に対し $D_p := \{X \in T_pM\ ;\ i_X\omega = 0\}$ とおく。このとき D_p の余次元 codim D_p を ω の p における **rank** と云い $\mathrm{rank}\,\omega$ で表す。以下 ω の rank は M 上一定 r と仮定する。このとき $D := \bigcup_{p \in M} D_p$ は M 上の接分布を定める。ω は閉微分形式であるから Frobenius の定理により D は integrable（involutive）。$N(p)$ で D の $p \in M$ を通る極大積分多様体を表す。(P, ω_P) を symplectic 多様体、N を多様体として $M := P \times N$ と定めると、第一成分への射影 $\mathrm{pr}_1 : M \to P$ に関する ω_P の引き戻し $\mathrm{pr}_1^* \omega_P$ は M 上の presymplectic 構造である。逆に、階数一定の presymplectic 構造 ω は局所的にはこのような形になっている。実際、次の Darboux の定理が presymplectic 多様体に対しても成立する：

Lemma 2.1. 任意の $p \in M$ に対して

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(x^1, \ldots, x^r) dx^i \wedge dx^j$$

となる局所座標系 $(U; x^1, \ldots, x^n)$ が存在する。

次に M/N 上の Hamilton ベクトル場を考える。$\Gamma_D := H^0(M, C^\infty(TM/D))$ と定め、M 上のベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(M)$ から Γ_D への自然な射影を π とする。Γ_D にはベクトル場の括弧積 $[\ ,\ ]$

から誘導される積で一般には閉じない。しかしながら

$$\mathfrak{h} := \{X \in \Gamma_D \ ; \ i_X\omega = df \text{ for some } f \in C^\infty(M)\},$$
$$\tilde{\mathfrak{h}} := \{f \in C^\infty(M) \ ; \ i_X\omega = df \text{ for some } X \in \Gamma_D\}$$

とおくと $(\mathfrak{h}, [,])$ は自然に Lie 環の構造を持ち、

$$0 \ \to \ \mathbb{R} \ \to \ \tilde{\mathfrak{h}} \ \to \ \mathfrak{h} \ \to \ 0$$

は完全系列となる。よって $f \in \tilde{\mathfrak{h}}$ を **Hamilton 函数**、対応する $X \in \mathfrak{h}$ を f の **Hamilton ベクトル場**と呼び、X_f で表す。$f \in C^\infty(M/N)$ で ω の null foliation の各 leaf N に沿って一定な函数 $f \in C^\infty(M)$ の全体を表す。すると $f \in C^\infty(M/N)$ に対し $L_{X_f} = df$ を満たす $X_f \in \mathfrak{h}$ が存在する。即ち $C^\infty(M/N) = \tilde{\mathfrak{h}}$. 次に $f, g \in C^\infty(M/N)$ に対し f と g の Poisson 積を

$$\{f, g\} := \omega(X_g, X_f) = -X_g f = X_f g$$

により定めると $(C^\infty(M/N), \{\ ,\ \})$ は Poisson 環となる。また

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

が成立する。presymplectic 多様体に対し $C^\infty(M)$ 全体での Poisson 括弧積は定義出来ず、部分環でのみ定義出来る事に注意せよ。

次に Lie 群 G の presymplectic 多様体 (M, ω) への作用を定義する。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ から Γ_D への（反）準同型 $g : \mathfrak{g} \to \Gamma_D$ が存在するとき、G は (M, ω) に**作用**していると定める。この作用には一般に軌道が存在しない。実際、x, y, z を $\mathbb{R}^3$ の座標とし、$\omega := \cos y dx \wedge dy + \sin y dy \wedge dz$ とする。ω は 3 次元トーラス T^3 上の 2 形式を定める。更に (T^3, ω) は presymplectic 多様体。このとき $D = \mathbb{R}(\sin y \frac{\partial}{\partial x} + \cos y \frac{\partial}{\partial z})$. いま $g : \mathrm{Lie}(T^2) \to \Gamma_D$ を

$$g(e_1) := \frac{\partial}{\partial y}, \ g(e_2) := -\cos y \frac{\partial}{\partial x} + \sin y \frac{\partial}{\partial z}$$

で定める。ここで $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2 \cong \mathrm{Lie}(T^2)$ は基底。

$$[g(e_1), g(e_2)] = \sin y \frac{\partial}{\partial x} + \cos y \frac{\partial}{\partial z}$$

から $i_{[g(e_1), g(e_2)]}\omega = 0$ となる。即ち $g : \mathrm{Lie}(T^2) \to \Gamma_D$ は準同型であり、T^2 の (T^3, ω) への作用を定める。いま、$\{g(e_1), g(e_2), [g(e_1), g(e_2)]\}$ は 任意の $p \in T^3$ に対し $\mathbb{R}^3 \cong T_pT^3$ の基底を成すが、$\mathbb{R}g(e_1) \oplus \mathbb{R}g(e_2)$ は可積分ではないから、この作用に関する T^3 における T^2 の軌道は一切存在しない。

G が (M, ω) に作用しており、$g(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ となっているとき G の作用を **Hamilton 的作用**と呼ぶ。G が Hamilton 的に作用しているとき $X \in \mathfrak{g}$ の Hamilton 函数を $\mu_X \in \tilde{\mathfrak{h}}$ で表す。このとき**運動量写像** $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ を

$$\langle X, \mu(p) \rangle = \mu_X(p), \quad p \in M,$$

により定める。$X \in \mathfrak{g}$ に対し $\mu_X \in \tilde{\mathfrak{h}}$ であるから、ω の null foliation の各 leaf N は運動量写像 μ で一点に写される。即ち任意の $p \in M$ に対し $N(p) \subset \mu^{-1}(\mu(p))$.

本節の最後に presymplectic 形式 ω が完全形式の場合を考える。(K, α) を接触多様体としたとき、$d\alpha$ は K 上の exact presymplectic 形式であり、逆に任意の exact presymplectic 形式は “退

化”接触形式と思える。実際、接触多様体に Lie 群が接触形式を保って作用しているとき、この作用は常に Hamilton 的、即ち常に運動量写像が存在する。exact presymplectic 多様体に対してもこれは成立する。実際、Lie 群 G が exact presymplectic 多様体 $(M, \omega = d\alpha)$ に ω、従って α を保って作用しているとする。すると運動量写像は $\mathfrak{g}$ の基底を $\{X_1, \dots, X_{\dim G}\}$ とすると

$$\mu = (-\alpha(X_1), \dots, -\alpha(X_{\dim G}))$$

で与えられる。接触構造より誘導される exact presymplectic 形式の運動量写像は接触構造に対する運動量写像と一致する。

Remark 2.2. 本節の話は complex category でも全て成立する。即ち、M^n を複素多様体とし、ω を real d-closed $(1,1)$-form with constant rank r とすると、ω の null foliation の leaf は complex submanifold になり、局所正則座標系 $(U, z^1, \dots, z^r, \dots, z^n)$ で

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} a_{\alpha\bar{\beta}}(z^1, \dots, z^r) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

となるものが存在する。$Y \in H^0(M, \mathcal{O}(TM/D))$ に対し Y に対応する実ベクトル場を $Y^{\mathbb{R}}$ とする : $Y^{\mathbb{R}} = Y + \bar{Y}$. このとき Hamilton 方程式 $i_{Y^{\mathbb{R}}}\omega = df$ は

$$i_Y \omega = \bar{\partial} f$$

となり、$f \in C^\infty(M/N)_{\mathbb{R}}$ に対する Hamilton ベクトル場 $X_f \in \mathfrak{h}$ が存在する。

3. 簡約

本節において presymplectic 多様体の運動量写像に対する簡約の定義を考察する。Lie 群 G が 2 節の意味で presymplectic 多様体 (M, ω) に Hamilton 的に作用していると仮定し、付随する運動量写像を $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ で表す。運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ の正常値の集合を $\mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$ で表す。いま $\eta \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$ と仮定し、$\mu^{-1}(\eta)$ の M への包含写像を i_η で表す。

Definition 3.1. 以下の 3 条件を満たす presymplectic 多様体 (M_η, ω_η) を (M, ω) の運動量写像 μ に関する **reduction** と呼ぶ :
(1) 全射 $p_\eta : \mu^{-1}(\eta) \to M_\eta$ が存在、
(2) $i_\eta^* \omega = p_\eta^* \omega_\eta$、
(3) これらを満たすもので次元が最小。
条件 (3) の代わりに次を課したものを **quasi-reduction** と呼ぶ :
(3′) $\dim M - \mathrm{rank}\ \omega = \dim M_\eta - \mathrm{rank}\ \omega_\eta$.

presymplectic 多様体の運動量写像 μ に対して $\eta \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$ なら、その reduction は常に存在する。実際、$\mu^{-1}(\eta)$ は上の定義の (1),(2) を満たす。

2 節で定義した作用には一般に軌道が存在しないから、簡約を軌道空間として定義する事は出来ない。群が通常の意味で作用しており、軌道空間が定義出来る場合には次のようになる : G をコンパクト Lie 群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とし、G が presymplectic 多様体 (M, ω) に “通常の意味で” 作用しており、作用により誘導される（反）準同型 $g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ と自然な射影 $\pi : \mathfrak{X}(M) \to \Gamma_D$

との合成による $\mathfrak{t}$ の像は $\mathfrak{h}$ に含まれるとする。いま $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ を G-同変な運動量写像とし、更に G_η を $\eta \in \mathfrak{g}^*$ における余随伴作用の安定化群とする。μ の正常値 η に対して $\mu^{-1}(\eta)$ への G_η の作用は自由であると仮定し、軌道空間を $M_\eta := \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ で表す。軌道空間 $M_\eta = \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ に対して自然な射影と自然な包含写像をそれぞれ $p_\eta : \mu^{-1}(\eta) \to M_\eta$ と $\iota_\eta : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M$ で表す。

Proposition 3.2. M_η 上 $\iota_\eta^* \omega = p_\eta^* \omega_\eta$ を満たす閉 2 形式 ω_η が存在する。

これにより軌道空間 (M_η, ω_η) はまた presymplectic 多様体である事が判る。また容易に判るとおりこれは quasi-reduction である。しかしながら、一般に $(\mu^{-1}(\eta)/G, \omega_\eta)$ は Definition 3.1 の意味での reduction ではない。例えば (P, ω_P) を symplectic 多様体で Hamilton 的に Lie 群 G が作用しているとする。Φ_P で付随する運動量写像を表し、$P_0 = \mu^{-1}(0)/G$ を symplectic 簡約とする。N を（可微分）多様体とし、$M = P \times N$ とおく。G を P には上の Hamilton 作用で、N には自明に作用させると運動量写像 μ は $\mu_P \circ \mathrm{pr}_1$ となる（ここで pr_1 は M から第一成分 P への射影）。この運動量写像に関し $0 \in \mathfrak{g}^*$ の逆像の軌道空間を考えると明らかに $\mu^{-1}(0)/G \cong P_0 \times N$ となる。これは Definition 3.1 の (1)、(2)、(3′) を満たすから quasi-reduction であるが、(3) を満たさない。この場合の reduction は $M_0 := P_0$ である。

rank $\omega = \dim M$、即ち symplectic 多様体の場合は次が成立する：

Proposition 3.3. (M, ω) を *symplectic* 多様体、$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ をコンパクト *Lie* 群 G の通常の作用に関する運動量写像とする。$0 \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ であり G が $\mu^{-1}(0)$ に *free* かつ *proper* に作用しているなら、*symplectic reduction* $(\mu^{-1}(0)/G, \omega_0)$ は *Definition 3.1* の意味での *reduction* ある。

Remark 3.4. Definition 3.1 の reduction に関して一意性は成立しない。実際、reduction M_0 の有限群による商もまた reduction となる。また、quasi-reduciton についても一意性は成立しない。実際、$M := \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{R}$ とおき、ω を $\mathbb{C}P^1$ 上の Fubini-Study 計量の M への引き戻しとする。このとき $\dim M - \mathrm{rank}\ \omega = 1$. いま $S^1 = \{e^{\sqrt{-1}\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$ の M への作用を、$\mathbb{C}P^1$ には通常通り、$\mathbb{R}$ には自明に作用させる。このとき $\mu^{-1}(0) = S^1 \times \mathbb{R}$ であるが、$M_0 = \{*\} \times S^1, \omega_0 = 0$ と $M_0' = \{*\} \times \mathbb{R}, \omega_0' = 0$ と定めると (M_0, ω_0), (M_0', ω_0') ともに quasi-reduciton であるが、明らかに M_0 と M_0' は微分同相ではない。但し $\{*\}$ で一点よりなる多様体を表す。

4. Phisical view point

constrained system の presymplectic による定式化は Dirac、Bergmann に端を発す (Dirac [7])。その後 Gotay, Nester and G. Hinds [11]、Gotaya and Nester [9, 10]、Cariñena, Gomis, Ibort and Román-Roy [6]、Bergvelt and de Kerf [2] などによって Lagrangian formalism、Hamiltonian formalism が得られた。ここでは本稿で述べた空間 M/N の物理学的側面を見る。

presymplectic 多様体 (M_0, ω_0) と M_0 上の函数 $h_0 \in C^\infty(M_0)$ に対し、3 つ組 (M_0, ω_0, h_0) を **presymplectic dynamical system** と云う。(M_0, ω_0, h_0) に対する運動方程式は

$$i_{X_0}\omega_0 - dh_0 = 0, \qquad X_0 \in \mathfrak{X}(M_0),$$

で表される。この方程式が解 X_0 を持つとき (M_0, ω_0, h_0) は **compatible** であると云う。一般に (M_0, ω_0, h_0) は compatible ではない。しかしながら次を満たす (maximal) regular closed submanifold $\iota_M : M \hookrightarrow M_0$ が存在する：

- $\iota_M^*(i_{X_0}\omega_0 - dh_0) = 0$,
- X_0 は M に接する（これを $X_0 \in \underline{\mathfrak{X}(M)}$ と書く）．

この M を **final constraint submanifold** と云う。$\omega := \iota^*\omega_0$, $h := \iota^* h_0$ とすることにより (M, ω, h) は compatible presymplectic dynamical system である。いま上の条件を満たす $X_0 \in \underline{\mathfrak{X}(M)}$ は一意ではない。これらの差となるベクトル場を **gauge vector field** と云い、その積分曲線上の任意の 2 点 p, p' を **gauge equivalent points** or **states** と云う。このとき $p \sim p'$ と定めると $\sim$ は同値関係である。$M/_\sim$ を **(moduli) space of physical states** と云う。$M/_\sim$ は ω の null foliation の leaf space M/N と自然に同一視される。

References

[1] R. Abraham and J.E. Marsden : Foundations of Mechanics, 2nd edition, Reading, Massachusetts, 1978.

[2] M.J. Bergvelt and E.A. de Kerf : Physica A **139** (1986), 101–124.

[3] M. Błaszak,and K. Marciniak : Dirac reduction of dual Poisson-presymplectic pairs. J. Phys. A **37** (2004), no. 19, 5173–5187.

[4] N.Boumuki and S.Maeda : Study of isotropic immersions, Kyungpook Mathematical Journal 45(2005), 363–394.

[5] A. Cannas da Silvaa, Y. Karshon and S. Tolman : Quantization of presymplectic manifolds and circle actions. Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 2, 525–552.

[6] J.F. Cariñena, J. Gomis, L.A. Ibort and N. Román-Roy : J. of Math. Physics **26** (1985), 1961–1969.

[7] P.A.M. Dirac : Quantum Mechanics, Yeshiva University, New York, 1964

[8] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda and N. Román-Roy : Reduction of presymplectic manifolds with symmetry, Rev. Math. Phys. **11** (1999), no. 10, 1209–1247.

[9] M.J. Gotay, J.M. Nester : Annales de l'Institut Henri Poincaré A, **30** (1979), 129–142.

[10] M.J. Gotay, J.M. Nester : Annales de l'Institut Henri Poincaré A, **32** (1980), 1–13.

[11] M.J. Gotay, J.M. Nester and G. Hinds : Journal of Mathematical Phtsics **27** (1978), 2388–2399.

[12] V. Guillemin and S. Sternberg : Symplectic techniques in Phisics, Cambridge Uviv. Press, Cambridge, 1984.

[13] T. Noda and M. Oda : Geometry of moment maps and reductions for presymplectic manifolds, submitted.

[14] I. Vaisman : Geometric quantization on presymplectic manifolds. Monatsh. Math. **96** (1983), no. 4, 293–310.

[15] S. Vignolo, and D. Bruno : Time-dependent vakonomic dynamics and presymplectic geometry. Riv. Mat. Univ. Parma (7) **1** (2002), 115–140.

Tomonori Noda
Graduate school of science, Osaka University
1-1 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan
&
Osaka City University Advanced Mathematical Institute
3-3-138, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585 Japan
E-mail address: `momentmap@yahoo.co.jp`