階数２のコンパクト対称空間内における全測地的部分多様体について

木村 太郎　東京理科大学理工学部

2006.11.29, 「部分多様体論・湯沢 2006」

本研究では，田中真紀子氏との共同研究で得られた，階数２のコンパクト対称空間内における全測地的部分多様体の分類と，その安定性について述べる．B.Y.Chen と長野正によって階数２の既約なコンパクト対称空間内の全測地的部分多様体の分類が知られているが，この分類は局所的な分類である ([2])．このことをふまえて，[4] では，B.Y.Chen と長野正による手法を大域的手法に拡張し，階数２の既約なコンパクト対称空間内の全測地的部分多様体の大域的な分類を与えた．

一方，[11] によって与えられたコンパクト対称空間の全測地的部分多様体の安定性に関する公式を用いて，ある種の全測地的部分多様体の安定性が決定されている．[4] で得られた全測地的部分多様体の安定性は全ては決定されていない．本研究では，[4] の分類に加え，その安定性を決定した．本稿では，これを報告する．

1　序論

定義 1.1. リーマン多様体 (N, g) が **リーマン対称空間**であるとは, 各点 $p \in N$ に対して次の条件を満たす N の等長変換 s_p が存在することである :

1. s_p は involutive (i.e., $s_p \circ s_p = id_N$).
2. 固定点集合 $F(s_p, N) = \{q \in N \mid s_p(q) = q\}$ の中で点 p は孤立点.

注意 1.2. 以下，リーマン対称空間は連結と仮定する．

定義 1.3. M, N をリーマン対称空間とする. C^∞ 級写像 $f : M \to N$ が, 各点 $p \in M$ に対して

$$f \circ s_p = s_{f(p)} \circ f$$

をみたすときに, **対称空間の準同型**という. 特に, 準同型 $f : M \to N$ が C^∞ 級微分同相写像のとき, f を**同型**と呼び, M と N は 対称空間として同型であるという.

定義 1.4. リーマン多様体 (N, g) の連結部分多様体 M が**全測地的部分多様体**であるとは, 各点 $p \in M$ に対して p を通る測地線（誘導計量に関して）が N の測地線になるときである.

補題 1.5. リーマン対称空間 N の自己同型写像 σ の固定点集合 $F(\sigma, N)$ の連結成分は, 全測地的である.

命題 1.6. リーマン対称空間 (N, g) の全測地的部分多様体 M は誘導計量に関してリーマン対称空間になる.

注意 1.7. 以下，リーマン対称空間 N の全測地的部分多様体 M を**部分空間**と呼ぶことにし，リーマン対称空間はコンパクトと仮定する．

次は，[2] で定義された部分空間である．

定義 1.8 (極地と子午空間). コンパクトリーマン対称空間 N の原点 o に対して, 固定点集合 $F(s_o, N)$ の連結成分を N における o の**極地**という. 特に点 $p \in N$ を含む極地を $N^+(p)$ と表す. また，$N^+(p)$ に対して, 固定点集合 $F(s_p \circ s_o, N)$ の点 $p \in N$ を通る連結成分を極地 $N^+(p)$ に対する**子午空間**といい, $N^-(p)$ と表す.

定義 1.9 (階数). リーマン対称空間 $N = G/K$ の 極大な平坦部分空間 A_N は互いに G 合同である. $\dim A_N$ を N の **階数** といい, $r(N)$ で表す.

2　知られている結果と得られた結果

いま，階数２の既約なコンパクトリーマン対称空間 N の極大部分空間 M を分類するために，単射準同型 $f: M \to N$ を考える．このとき，$r(M) \leqq r(N)$ が成立する．[2] において，M は局所的分類であるので，本研究では，M は局所同型類を全て区別して分類を行う．ただし，N の単連結性は仮定する．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2.1 (Chen – Nagano([2])). M, N の原点をそれぞれ o_M, o_N とし, c_M, c_N を それぞれ o_M, o_N を通る閉測地線とする. このとき, c_M, c_N 上の o_M, o_N の対蹠点をそれぞれ p_M, p_N とする. $f: M \to N$ を $f(o_M) = o_N$, $f(p_M) = p_N$ である単射準同型とする. このとき, f は次の２つの単射準同型を引き起こす:

$$f^+ : M^+(p_M) \to N^+(p_N), \qquad f^- : M^-(p_M) \to N^-(p_N).$$

すなわち , N の部分空間 M に対して, M の極地と子午空間は, それぞれ N の極地と子午空間の部分空間になる.

この定理は，部分空間であるための必要条件を与える．また大域的分類を行うために次の定理が必要である．

定理 2.2 (Nagano([10])). コンパクト連結既約リーマン対称空間 N は一組の極地 N^+ と子午空間 N^- によって完全に決定される. すなわち, あるコンパクト連結既約リーマン対称空間 M の極地 M^+ と子午空間 M^- に対して $M^+ \cong N^+$, $M^- \cong N^-$ ならば $M \cong N$ である.

加えて，[2] の手法を大域的手法に拡張し，階数２の既約なコンパクト単連結リーマン対称空間 N の極大部分空間を分類した．また次の結果も参照した．

1. A.Borel – J.Siebenthal([1]) による，コンパクト単純 Lie 群の最大階数の極大 Lie 部分群の分類.
2. J.A.Wolf([15]) による，階数１のコンパクト対称空間の部分空間の分類.
3. 井川 – 田崎 ([3]) による，正規実型のコンパクト対称空間内の最大階数の極大部分空間の分類．ここで，対称空間 $M = G/K$ が正規実型とは，$r(M) = r(G)$ が成り立つこと．

以上より，我々は次の定理を得た．

定理 2.3 (Kimura – Tanaka([4])). 階数２のコンパクト単連結既約リーマン対称空間 N の極大部分空間 M は表 1 で与えられる．

3　安定性について

前節で得られた極大部分空間の安定性を決定する．いま，単射準同型 $f: M = G/K \to N = U/L$ に対して，[11] により，f の index(f) は次で与えられる．

$$\mathrm{index}(f) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{\lambda \in D(G) \\ a_\lambda > a_i}} \dim \mathrm{Hom}_K(V_\lambda, (\mathfrak{m}_i^\perp)^{\mathbb{C}}) \dim V_\lambda \tag{\#}$$

ここで，$D(G)$ は G の既約表現 (λ, V_λ) の同値類全体の集合を表す．また，G と U の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{u}$，M と N の標準分解をそれぞれ $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ と $\mathfrak{u} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ とする．$\mathfrak{u}$ における $\mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{g}^\perp$ とすると，単純 G-module 分解 $\mathfrak{g}^\perp = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_i^\perp$ を得る．$\mathfrak{m}^\perp := \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^\perp$，$\mathfrak{m}_i^\perp := \mathfrak{m}^\perp \cap \mathfrak{g}_i^\perp$ とし，a_λ は G の既約表現 (λ, V_λ) の Casimir 作用素の固有値，a_i は G の既約表現 $(\mu_i, \mathfrak{g}_i^\perp)$ の Casimir 作用素の固有値を表す．f が安定（M が安定）であるための必要十分条件は，index$(f) = 0$ である．既約なコンパクト連結リーマ

ン対称空間の極地と子午空間の安定性は，[14] によって決定されている．またある種の部分空間の安定性も，[7]，[8], [12]，[13] で決定されている．ここでは，N が A_2, G_2 型のときに限って報告する．他の場合の安定性については，[5] を参照されたい．

3.1 A_2 型対称空間の部分空間の安定性

制限ルート系 A_2 型の対称空間は，$AI(3) = SU(3)/SO(3), SU(3) = (SU(3)\times SU(3))/SU(3), AII(3) = SU(6)/Sp(3)$ と $EIV = E_6/F_4$ である．これらの極大部分空間の安定性を決定する．

$AI(3)$ の場合 : 極大部分空間は，$\mathbb{R}P^2$ および $S^1\cdot S^2$ である．$\mathbb{R}P^2$ は極地，$S^1\cdot S^2$ は子午空間であるので，[14] より，$\mathbb{R}P^2$ は不安定，$S^1\cdot S^2$ は安定．

$SU(3)$ の場合 : 極大部分空間は，$AI(3)$, $SO(3)$,$\mathbb{C}P^2$ および $S^1\cdot S^3$ である．$\mathbb{C}P^2$ は極地，$S^1\cdot S^3$ は子午空間であるので，[14] より，$\mathbb{C}P^2$ は不安定，$S^1\cdot S^3$ は安定．また，$AI(3)$ は Cartan 埋め込みであり，[8] より，不安定．また，[7] より，$SO(3)$ は不安定．

$AII(3)$ の場合 : 極大部分空間は，$SU(3)$, $\mathbb{C}P^3$, $\mathbb{H}P^2$ および $S^1\cdot S^5$ である．$\mathbb{H}P^2$ は極地，$S^1\cdot S^5$ は子午空間であるので，[14] より，$\mathbb{H}P^2$ は不安定，$S^1\cdot S^5$ は安定．

命題 3.1. 包含写像 $f: G/K = (SU(3)\times SU(3))/SU(3) \to U/L = SU(6)/Sp(3)$ は不安定．

証明. [6] により, $SU(3)$ は $AII(3)$ において鏡映部分空間であり，Hermann 作用の全測地的軌道である．よって，自己同型群の準同型 $\rho: G\to U$ は， 対称対 $(SU(6), T\cdot(SU(3)\times SU(3)))$ から引き起こされる．ρ の微分を同様に ρ で表し，$\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}^\perp$ とすると，$\mathfrak{g}^\perp \cong \mathbb{R}\oplus T_oG_3(\mathbb{C}^6)$ であり，この直和分解は単純 $\mathfrak{g}$-module 分解である．$\mathfrak{g}_1^\perp = \mathbb{R}$, $\mathfrak{g}_2^\perp = T_oG_3(\mathbb{C}^6)$ とすると，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_1^\perp$ への作用は自明で，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_2^\perp$ への作用は $G_3(\mathbb{C}^6)$ の線形イソトロピー表現の $\mathfrak{g}$ への制限と同値．これから，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_2^\perp$ への作用の Casimir 作用素の固有値は $-16/3$ となり，$(\#)$ は

$$\mathrm{index}(f) = \sum_{\substack{\lambda\in\{0,\ \varpi_1(A_2)+0,\ 0+\varpi_1(A_2),\\ \varpi_2(A_2)+0,\ 0+\varpi_2(A_2)\}\\ a_\lambda > -16/3}} \dim \mathrm{Hom}_{SU(3)}(V_\lambda, (\mathfrak{m}_2^\perp)^{\mathbb{C}})\,\dim V_\lambda.$$

いま，$\mathfrak{m}_2^\perp \cong T_o\mathbb{C}P^3$ で，$SU(3)$ の $\mathfrak{m}_2^\perp$ への作用は $\mathbb{C}P^3$ の線形イソトロピー表現 $T+\varpi_2(A_2)$ の $SU(3)$ への制限と同値．よって，$SU(3)$-module として $(\mathfrak{m}_2^\perp)^{\mathbb{C}} = V_{\varpi_2(A_2)}$ を得る．$\lambda = \varpi_2(A_2)+0$ に対して，$V_\lambda = V_{\varpi_2(A_2)}\otimes\mathbb{C}$ であり，$SU(3)$-module としては $V_\lambda = V_{\varpi_2(A_2)}$ である．これから，$\mathrm{index}(f)\neq 0$. ■

命題 3.2. 包含写像 $f: G/K = SO(6)/U(3) \to U/L = SU(6)/Sp(3)$ は不安定．

証明. [6] により, $\mathbb{C}P^3$ は $AII(3)$ において鏡映部分空間であり，Hermann 作用の全測地的軌道である．よって，自己同型群の準同型 $\rho: G\to U$ は， 対称対 $(SU(6), SO(6))$ から引き起こされる．ρ の微分を同様に ρ で表し，$\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}^\perp$ とすると，$\mathfrak{g}^\perp \cong T_oAI(6)$ であり，$\mathfrak{g}^\perp$ は単純 $\mathfrak{g}$-module である．つまり，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^\perp$ への作用は $AI(6)$ の線形イソトロピー表現と同値．これから，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^\perp$ への作用の Casimir 作用素の固有値は -12 となり，$(\#)$ は

$$\mathrm{index}(f) = \sum_{\substack{\lambda\in D\\ a_\lambda>-12}} \dim \mathrm{Hom}_{U(3)}(V_\lambda, (\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}})\,\dim V_\lambda,$$

ここで，$D = \{0, \varpi_1(A_3), \varpi_2(A_3), \varpi_3(A_3), 2\varpi_2(A_3), 2\varpi_3(A_3), (\varpi_1+\varpi_2)(A_3), (\varpi_2+\varpi_3)(A_3), (\varpi_1+\varpi_3)(A_3)\}$.

いま，$\mathfrak{m}^\perp \cong T_oSU(3)$ で，$SU(3)$ の $\mathfrak{m}^\perp$ への作用は $SU(3)$ の線形イソトロピー表現 $(\varpi_1+\varpi_2)(A_2)$ と同値．$SU(3)$-module として $(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}} = V_{(\varpi_1+\varpi_2)(A_2)}$ を得る．いま，$\lambda = (\varpi_2+\varpi_3)(A_3)$ を $SU(3)$-module に分解すると，[9] により

$$V_{(\varpi_2+\varpi_3)(A_3)} = V_{2\varpi_2(A_2)}\oplus V_{(\varpi_1+\varpi_2)(A_2)}\oplus V_{\varpi_1(A_2)}\oplus V_{\varpi_2(A_2)}.$$

これから，$\mathrm{index}(f)\neq 0$. ■

EIV の場合 : 極大部分空間は，$AII(3)$, $\mathbb{H}P^3$, $S^1 \cdot S^9$ および $\mathbb{O}P^2$ である．$\mathbb{O}P^2$ は極地，$S^1 \cdot S^9$ は子午空間であるので，[14] より，$\mathbb{O}P^2$ は不安定，$S^1 \cdot S^9$ は安定.

命題 3.3. 包含写像 $f: G/K = SU(6)/Sp(3) \to U/L = E_6/F_4$ は不安定.

証明. [6] により, $AII(3)$ は EIV において鏡映部分空間であり，Hermann 作用の全測地的軌道である．よって，自己同型群の準同型 $\rho: G \to U$ は，対称対 $(E_6, SU(6) \cdot SU(2))$ から引き起こされる．ρ の微分を同様に ρ で表し，$\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$ とすると，$\mathfrak{g}^{\perp} \cong \mathfrak{su}(2) \oplus T_o EII$ であり，$\mathfrak{g}^{\perp}$ を単純 $\mathfrak{g}$-module 分解すると，$\mathfrak{g}^{\perp} = \{\mathfrak{g}_i^{\perp}\}_{i=1}^3 \oplus \mathfrak{g}_4^{\perp} \oplus \mathfrak{g}_5^{\perp}$. ここで，$\mathfrak{g}_i^{\perp} \cong \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_4^{\perp} \cong \mathfrak{g}_5^{\perp} \cong V_{\varpi_3}(A_5)$ である．これから，$\mathfrak{g}$ の $\{\mathfrak{g}_i^{\perp}\}_{i=1}^3$ への作用は自明で，$\mathfrak{g}$ の $\left\{\mathfrak{g}_i^{\perp}\right\}_{i=4,5}$ への作用は EII の線形イソトロピー表現を $SU(6)$ へ制限したものと同値. これから，$\mathfrak{g}$ の $\left\{\mathfrak{g}_i^{\perp}\right\}_{i=4,5}$ への作用の Casimir 作用素の固有値は，それぞれ $-21/2$ であり，(#) は

$$\mathrm{index}(f) = \sum_{i=4}^{5} \sum_{\substack{\lambda \in D \\ a_\lambda > -21/2}} \dim \mathrm{Hom}_{Sp(3)}(V_\lambda, (\mathfrak{m}_{\mathrm{i}}^{\perp})^{\mathbb{C}}) \dim V_\lambda,$$

ここで，$D = \{0, \varpi_1(A_5), \varpi_2(A_5), \varpi_4(A_5), \varpi_5(A_5)\}$. いま，$\mathfrak{m}^{\perp} \cong T_o \mathbb{H}P^3$ で, $\mathfrak{m}_i^{\perp} = \{0\}$ $(i = 1, 2, 3)$ なので $\mathfrak{m}^{\perp} = \mathfrak{m}_4^{\perp} \oplus \mathfrak{m}_5^{\perp}$ である．$\mathfrak{m}^{\perp}$ は $\mathbb{H}P^3$ の線形イソトロピー表現の表現空間と同型であることから，$(\mathfrak{m}^{\perp})^{\mathbb{C}} = V_{\varpi_1(C_1)} \otimes V_{\varpi_1(C_3)}$ となる．$V_{\varpi_1(C_1)} \otimes V_{\varpi_1(C_3)}$ を $Sp(3)$ に制限すると, $(\mathfrak{m}^{\perp})^{\mathbb{C}} = V_{\varpi_1(C_3)} \oplus V_{\varpi_1(C_3)}$. これから，$(\mathfrak{m}_i^{\perp})^{\mathbb{C}} = V_{\varpi_1(C_3)}$ $(i = 4, 5)$ となる. いま，$\lambda = \varpi_5(A_5)$ を $Sp(3)$ に制限すると, [9] により $V_{\varpi_1(C_3)}$ となる．よって，$\mathrm{index}(f) \neq 0$. ■

命題 3.4. 包含写像 $f: G/K = Sp(4)/(Sp(1) \times Sp(3)) \to U/L = E_6/F_4$ は不安定.

証明. [6] により, $\mathbb{H}P^3$ は EIV において鏡映部分空間であり，Hermann 作用の全測地的軌道である．よって，自己同型群の準同型 $\rho: G \to U$ は，対称対 $(E_6, Sp(4)^{\%})$ から引き起こされる．ρ の微分を同様に ρ で表し，$\mathfrak{u} = \rho(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$ とすると，$\mathfrak{g}^{\perp} \cong T_o EI$ であり，$\mathfrak{g}^{\perp}$ は単純 $\mathfrak{g}$-module である．つまり，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^{\perp}$ への作用は EI の線形イソトロピー表現と同値. これから，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^{\perp}$ への作用の Casimir 作用素の固有値は -18 となり，(#) は

$$\mathrm{index}(f) = \sum_{\substack{\lambda \in \{0, \varpi_1(C_4), \varpi_2(C_4)\} \\ a_\lambda > -18}} \dim \mathrm{Hom}_{Sp(1) \times Sp(3)}(V_\lambda, (\mathfrak{m}^{\perp})^{\mathbb{C}}) \dim V_\lambda.$$

いま，$\mathfrak{m}^{\perp} \cong T_o AII(3)$ で，$Sp(3)$ の $\mathfrak{m}^{\perp}$ への作用は $AII(3)$ の線形イソトロピー表現 $\varpi_2(C_3)$ と同値. すなわち，$Sp(3)$-module として $(\mathfrak{m}^{\perp})^{\mathbb{C}} = V_{\varpi_2(C_3)}$ を得る. $\lambda = \varpi_2(C_4)$ を $Sp(1) \times Sp(3)$ に制限すると, [9] により

$$V_{\varpi_2(C_4)} = (\mathbb{C} \otimes V_{\varpi_2(C_3)}) \oplus (V_{\varpi_1(A_1)} \otimes V_{\varpi_1(C_3)}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}).$$

よって，$\mathrm{index}(f) \neq 0$. ■

3.2 G_2 型対称空間の部分空間の安定性

制限ルート系 G_2 型の対称空間は，$G_2 = (G_2 \times G_2)/G_2$ と $GI = G_2/SO(4)$ である．これらの極大部分空間の安定性を決定する.

G_2 の場合 : 極大部分空間は，$SU(3)$, GI および $S^3 \cdot S^3$ である．GI は極地，$S^3 \cdot S^3$ は子午空間であるので，[14] より，GI は不安定，$S^3 \cdot S^3$ もまた不安定. [7] により，$SU(3)$ は G_2 において安定.

GI の場合 : 極大部分空間は，$AI(3)$, $\mathbb{C}P^2$ および $S^2 \cdot S^2$ である．$S^2 \cdot S^2$ は極地と子午空間であるので，[14] より，$S^2 \cdot S^2$ は不安定.

命題 3.5. 包含写像 $f: G/K = SU(3)/U(2) \to U/L = G_2/SO(4)$ は安定.

証明．$\mathfrak{g}_2$ を G_2 の Lie 環とし，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}_2$ の Cartan 部分代数とする．このとき，$\mathfrak{h}$ に関する $\mathfrak{g}_2$ のルート空間分解を得る : $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_2)} \mathfrak{g}_\alpha$. いま，$\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2}$, $\mathfrak{g}' := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2}$ とおくと，$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}(3), \mathfrak{g}' \cong \mathfrak{so}(4)$ となる．このとき，$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}' \cong \mathfrak{u}(2)$ で，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}')$ は対称対．いま，$\mathfrak{u} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$ とする．ここで，$\mathfrak{g}^\perp = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+\alpha_2}$ である．ルート空間の性質 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha-\beta}$ より，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^\perp$ への作用は既約で，$\mathfrak{su}(3)$ の $\mathbb{C}^3$ への作用と同値．これから，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^\perp$ への作用の Casimir 作用素の固有値は $-8/3$ であり，(#) は

$$\mathrm{index}(f) = \dim \mathrm{Hom}_{U(2)}(\mathbb{C}, (\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}}).$$

また，$\mathfrak{m}^\perp = \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+\alpha_2}$ への $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}' \cong \mathfrak{u}(2)$ の作用は，$\mathfrak{u}(2)$ の $\mathbb{C}^2$ への作用と同値．すなわち，$(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V_{\varpi_1(A_1)}$ を得る．よって，$\mathrm{index}(f) = 0$. ■

命題 3.6. 包含写像 $f : G/K = SU(3)/SO(3) \to U/L = G_2/SO(4)$ は安定.

証明．GI の標準分解を $\mathfrak{u} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ とする．$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとると，$\mathfrak{a}$ に関する $\mathfrak{u}$ のルート空間分解を得る : $\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_2)} \mathfrak{l}_\alpha \oplus \mathfrak{a} \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_2)} \mathfrak{p}_\alpha$. いま，$\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{l}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_2}) \oplus (\mathfrak{l}_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{3\alpha_1+\alpha_2}) \oplus (\mathfrak{l}_{3\alpha_1+2\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{3\alpha_1+2\alpha_2})$ とおくと $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{l} \cong \mathfrak{so}(3)$ で $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \cap \mathfrak{l})$ は対称対．いま $\mathfrak{u} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$ とする．ここで，$\mathfrak{g}^\perp = (\mathfrak{l}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1}) \oplus (\mathfrak{l}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2}) \oplus (\mathfrak{l}_{2\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{2\alpha_1+\alpha_2})$ である．$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}^\perp$ への作用は, **命題 3.5** と同様であるから，(#) は

$$\mathrm{index}(f) = \dim \mathrm{Hom}_{SO(3)}(\mathbb{C}, (\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}}).$$

また，$\mathfrak{m}^\perp = \mathfrak{p}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_{2\alpha_1+\alpha_2}$ への $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{l} \cong \mathfrak{so}(3)$ の作用は，$\mathfrak{so}(3)$ の $\mathbb{R}^3$ への作用と同値．すなわち，$(\mathfrak{m}^\perp)^{\mathbb{C}} = V_{\varpi_1(A_1)}$ を得る．よって，$\mathrm{index}(f) = 0$. ■

N	N の極大部分空間 M
$AI(3)$	$\mathbb{R}P^2$, $S^1 \cdot S^2$
$SU(3)$	$AI(3)$, $SO(3)$,$\mathbb{C}P^2$, $S^1 \cdot S^3$
$AII(3)$	$SU(3)$, $\mathbb{C}P^3$, $\mathbb{H}P^2$, $S^1 \cdot S^5$
EIV	$AII(3)$, $\mathbb{H}P^3$, $S^1 \cdot S^9$, $\mathbb{O}P^2$
$G_2^o(\mathbb{R}^{n+2})$ $(n \geq 3)$	$G_2^o(\mathbb{R}^{n+1})$, $S^p \cdot S^q$ $(p+q=n)$, $\mathbb{C}P^{[\frac{n}{2}]}$
$Sp(2)$	$G_2^o(\mathbb{R}^5)$, $S^1 \cdot S^3$, $S^3 \times S^3$, S^4
$G_2(\mathbb{H}^4)$	$Sp(2)$, $\mathbb{H}P^2$, $S^1 \cdot S^5$, $S^4 \times S^4$, $G_2(\mathbb{C}^4)$
GI	$AI(3)$, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \cdot S^2$
G_2	GI, $SU(3)$, $S^3 \cdot S^3$
$G_2(\mathbb{C}^{n+2})$ $(n \geq 3)$	$G_2(\mathbb{C}^{n+1})$, $G_2(\mathbb{R}^{n+2})$, $\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l$ $(k+l=n)$, $\mathbb{H}P^{[\frac{n}{2}]}$
$G_2(\mathbb{H}^{n+2})$ $(n \geq 3)$	$G_2(\mathbb{H}^{n+1})$, $G_2(\mathbb{C}^{n+2})$, $\mathbb{H}P^k \times \mathbb{H}P^l$ $(k+l=n)$
$DIII(5)$	$G_2^o(\mathbb{R}^8)$, $G_2(\mathbb{C}^5)$, $SO(5)$, $S^2 \times \mathbb{C}P^3$, $\mathbb{C}P^4$
$EIII$	$G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{O}P^2$, $S^2 \times \mathbb{C}P^5$, $DIII(5)$, $G_2(\mathbb{C}^6)$, $G_2^o(\mathbb{R}^{10})$

表 1: 階数２のコンパクト対称空間内の極大部分空間

参考文献

[1] A. Borel and J. Siebenthal, *Les sous-groupes fermés connexes de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comm. Math. Helv., **23** (1949/50) 200-221.

[2] B. Y. Chen and T. Nagano, *Totally geodesic submanifold of symmetric spaces II*, Duke Math. J., **45** (1978), 405-425.

[3] O. Ikawa and H. Tasaki, *Totally geodesic submanifold of maximal rank in symmetric spaces*, Japan. J. Math., **26** no1 (2000), 1-29.

[4] T. Kimura and M. S. Tanaka, *Totally geodesic submanifold in compact symmetric spaces of rank two*, preprint.

[5] T. Kimura and M. S. Tanaka, *Stability of certain minimal submanifolds in compact symmetric spaces of rank two*, in preparation.

[6] D. S. P. Leung, *On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, Indiana. Univ. Math. J., **24** (1974), 327-339; Errata, Indiana. Univ. Math. J., **24** (1975), 1199.

[7] K. Mashimo and H. Tasaki, *Stability of closed Lie subgroups in compact Lie groups*, Kodai Math. J., **13** (1990), 181-203.

[8] K. Mashimo, *On the stability of Cartan embeddings of compact symmetric spaces*, Arch. Math., **58** (1992), 500-508.

[9] W. G. McKay and J. Patera, Table of dimension, indices, and branching rules for representation of simple Lie algebras, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 69*, Marcel Dekker, inc., New York and Baesel (1981)

[10] T. Nagano, *The Involutions of Compact Symmetric Spaces II*, Tokyo J. Math., **15** (1992), 39-82.

[11] Y. Ohnita, *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*, Composito Mathematica., **64** (1987), 157-189.

[12] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku. Math. J., **36** (1984), 293-314.

[13] M. Takeuchi, *Totally complex submanifolds of quaternionic symmetric spaces*, Japan J. Math., **12** (1986), 161-189.

[14] M. S. Tanaka, *Stability of minimal submanifolds in symmetric spaces*, Tsukuba J. Math., **19** (1995), 27-56.

[15] J. A. Wolf, *Elliptic Spaces in Grassmann manifolds*, Illinois J. Math., **7** (1963), 447-462.