与えられた写像を Gauss 写像にもつ S^n 内の曲面

横浜市立大学　　田中　亜矢子

連結なリーマン面 M と n 次元単位球面 S^n，共形はめ込み $X : M \longrightarrow S^n$ の組 $S = (M, S^n, X)$ を S^n 内の曲面とする．M 上の複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ をとり，U を連結とする．各 $u \in U$ に対し，$(n+1)$ 次元ユークリッド空間 R^{n+1} 内の平行移動により，接ベクトル $dX_u\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_u\right)$，$dX_u\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_u\right)$ と $\frac{\partial X}{\partial u_1}(u)$, $\frac{\partial X}{\partial u_2}(u)$ をそれぞれ同一視すると，$X(M)$ の各接平面を R^{n+1} において原点に平行移動した向き付けられた 2 次元平面に対応する n 次元複素射影空間 CP^n の 2 次曲面 $Q_{n-1} := \{[w] \in CP^n | {w_1}^2 + \cdots + {w_{n+1}}^2 = 0\}$ の元が一意に定まる．曲面 S の $Gauss$ 写像を

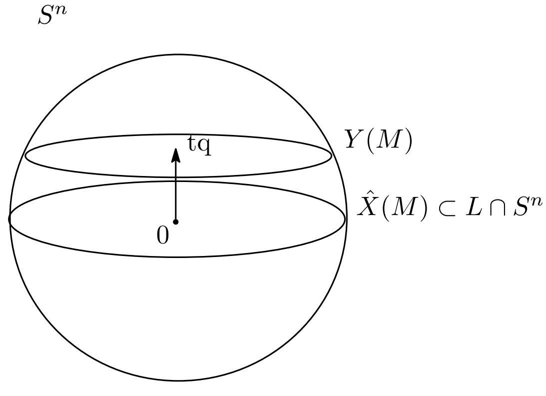
$$G : M \longrightarrow Q_{n-1} \quad \left(u \longmapsto \left[\frac{\partial X}{\partial \bar{z}}(u)\right]\right)$$

と定義する．

各 $u \in M$ に対し，$G(u)$ に対応する R^{n+1} の原点を通る向き付けられた 2 次元平面を $\hat{G}(u)$ とし，$P(M, G) = \bigcup_{u \in M} \hat{G}(u)$ とおく．$P(M, G)$ を含む R^{n+1} 内の最小次元の線形部分空間を L とし，その次元を k とすると，$2 \leq k \leq n+1$ となる．R^{n+1} における L の直交補空間を $L^\perp$ とおく．R^{n+1} 内の全ての m 次元標構からなる $Stiefel$ 多様体を $St(n+1, m)$ であらわす．I_k を k 次単位行列とする．同じ $Gauss$ 写像をもつ曲面が S^n 内に存在した場合，それらの曲面の位置関係は L の次元 k に依存していることが次の補題により分かる．

補題 1. M を連結なリーマン面とし，曲面 $S = (M, S^n, X)$ の $Gauss$ 写像を $G : M \longrightarrow Q_{n-1}$ とする．$3 \leq k \leq n$ ならば，以下が成り立つ．

(1) G を $Gauss$ 写像にもち，$\hat{X}(M) \subset L \cap S^n$ を満たす S^n 内の曲面 $\hat{S} = (M, S^n, \hat{X})$ が存在する．
(2) 曲面 $S_Y = (M, S^n, Y)$ の $Gauss$ 写像が G であるならば，Y は $Y = c\hat{X} + tq$ とあらわせる．ここに，c と t は $c = \pm\sqrt{1-t^2}$ $(|t| < 1)$ を満たす定数で，$q \in L^\perp \cap S^n$ である．



補題 2. M, G と $S = (M, S^n, X)$ を補題 1 の通りとする．曲面 $S_Y = (M, S^n, Y)$ の $Gauss$ 写像が G であるとする．このとき，$k = n+1$ ならば，$Y = \pm X$ である．

与えられた写像を $Gauss$ 写像にもつ S^n 内の曲面について考察する．M を連結なリーマン面とし，C^∞ 写像 $G : M \longrightarrow Q_{n-1}$ $(n \geq 3)$ を与える．M の複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ をとり，U は連結とする．U を十分小さくとれば，C^∞ 写像 $E_i : U \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{0\}$　$(i = 1, 2)$ を各 $u \in U$ に対し次を満たすようにとれる．

1. $E^T(u) := (E_1(u), E_2(u))$ が $\hat{G}(u)$ の正規直交標構である．
2. $E^T(u)$ は $\hat{G}(u)$ の向きに従う．

$E(u) := (E^T(u), E^N(u)) = (E_1(u), E_2(u), E_3(u), \cdots, E_{n+1}(u))$ を R^{n+1} 内における正の向きの正規直交標構となるようにとる．

M が $Gauss$ 平面 C のとき次の定理を得る．$z = u_1 + \sqrt{-1}u_2$ を C 上の標準的な座標関数とする．

定理 1． C^∞ 写像 $G : C \longrightarrow Q_{n-1}$ $(n \geq 3)$ を与える．$k \geq 3$ とする．さらに C 上の任意の点 z_0 に対し，z_0 の連結な開近傍 U_0 が存在し，C^∞ 写像

$$\begin{aligned} E^T &= (E_1, E_2) : U_0 \longrightarrow St(n+1, 2), \\ E^N &= (E_3, \cdots, E_{n+1}) : U_0 \longrightarrow St(n+1, n-1) \end{aligned}$$

で定義される写像 $E = (E^T, E^N) : U_0 \longrightarrow SO(n+1)$ が以下の条件を満たすと仮定する：

(i) 各点 $u \in U_0$ において $E^T(u)$ は $\hat{G}(u)$ の向き付けを与える正規直交標構である．

(ii) U_0 上で

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial \bar{z}}\frac{\partial E^N}{\partial z} + {}^tE^N\frac{\partial E^N}{\partial z}\frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial \bar{z}}E^N\right\} = 0$$

が成り立つ．

(iii) U_0 上で

$$(I_{n+1} - E^N\, {}^tE^N)\frac{\partial E^N}{\partial u_j} \neq 0 \quad (j = 1, 2)$$

が成り立つ．U_0 上で，

$$B := \frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial z}\Big(I_{n+1} - E^N\, {}^tE^N\Big)\frac{\partial E^N}{\partial z}$$

とおくとき，z_0 において ${}^t\xi B(z_0)\xi = 0$ となる $\xi \in R^{n-1} \setminus \{0\}$ が存在する．

(iv) U_0 上で

$$\frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial z}E^N B + B\, {}^tE^N\frac{\partial E^N}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

が成り立つ．

このとき，G を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S = (C, S^n, X)$ が存在する．

条件 (i)-(iv) は正規直交標構 $E = (E^T, E^N)$ の取り方に依らない．また，条件 (i)-(iv) を満たす具体的な G が存在する．この定理は C のかわりにリーマン球 S^2 についても成り立つ．また，C のかわりにトーラス T^2 とした場合は，T^2 上の被覆空間 $(\hat{T}^2, T^2, \hat{\pi})$ と $G \circ \hat{\pi}$ を Gauss 写像にもつ曲面 $(\hat{T}^2, S^n, X)$ が存在する．

S^n 内の曲面の $Gauss$ 写像と平均曲率場の間で成り立つ関係について示す．$\Psi \in C^m$ のノルム $|\Psi|$ を $|\Psi|^2 = <\Psi, \Psi>$ で定義する．H_0 を曲面 S の S^n での平均曲率ベクトル場とする．R^{n+1} における平行移動により $H_0(z) = \Big(X(z), H(z)\Big)$ $(z \in M)$ を満たす C^∞ 写像 $H : M \longrightarrow R^{n+1}$ と H_0 を同一視する．

M を連結なリーマン面とし，$G : M \longrightarrow Q_{n-1}$ $(n \geq 3)$，　$H : M \longrightarrow R^{n+1}$ を C^{∞} 写像とする．G は M 上の複素座標近傍系 (U, z) で C^{∞} 写像 $\Phi : U \longrightarrow C^{n+1} \backslash \{0\}$ を用いて $G(p) = [\bar{\Phi}(p)]$ $(p \in U)$ と表せる．C^{∞} 写像 $\eta : U \longrightarrow C$ と $V : U \longrightarrow C^{n+1}$ を

$$\eta = \frac{< \Phi_{\bar{z}}, \Phi >}{|\Phi|^2}, \quad V = \Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi$$

で定義する．G, H が以下の条件を満たすとする．

$$\begin{aligned}
V &= e^{i\theta} R, \quad V(z) \neq 0, \quad R(z) \in R^{n+1} \quad (z \in U), && (1)\\
\theta_{z\bar{z}} &= \mathrm{Im}\{\eta_z\}, && (2)\\
< H, \Phi > &= 0, && (3)\\
< H, \Phi_{\bar{z}} > &= \frac{|V||H|^2 e^{-i\theta}}{\sqrt{1+|H|^2}}, && (4)\\
i\theta_z &= 2(\log|\Phi|)_z + \frac{1}{2}\Big(\log(1+|H|^2)\Big)_z - (\log|V|)_z - \bar{\eta}, && (5)\\
e^{i\theta} H_z &= \frac{\sqrt{1+|H|^2}}{|V|}\Big(V_z - 2(\log|\Phi|)_z V + \bar{\eta} V\Big) + \frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}\Phi. && (6)
\end{aligned}$$

これらの条件は複素座標近傍系の取り方に依らない．以下の定理を得る．

定理 2. M をリーマン面とし，C^{∞} 写像 $G : M \longrightarrow Q_{n-1}$ $(n \geq 3)$，　$H : M \longrightarrow R^{n+1}$ を与える．G と H が M 上のすべての点の複素座標近傍上で条件 (1)-(6) を満たすと仮定する．このとき，Gauss 写像が G であり，平均曲率ベクトル場が H である曲面 $S = (M, S^n, X)$ が存在する．

定理 2 で得た曲面を与える C^{∞} 共形はめこみ $X : M \longrightarrow S^n$ は局所的に

$$X = H - \frac{1}{\bar{\psi}|\Phi|^2} V$$

と表せる．ただし，

$$\psi = \frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}} e^{-i\alpha}, \qquad \alpha \equiv \theta \mod 2\pi$$

とする．

現在，定理 2 の条件を用いることにより，定理 1 の条件を満たす曲面の Gauss 写像と S^n における平均曲率ベクトル場の性質を考察している．一般次元での考察は成功していないが，$n = 3, 4$ については極小曲面でない場合は定理 1(iv) ならば以下の条件を満たすことが分かった．

$n = 3$ のときは $|H|_z = 0$ であり，$n = 4$ のときは $|H|_z = 0$ と $< H_z, \bar{\Phi} >= 0$ を満たすことが分かった．

References

[1] A. Tanaka, Surfaces in S^n with prescribed Gauss map, *Tokyo Journal of Mathematics* Vol. 29, No 1.(2006) 91-110.

[2] A. Tanaka, Surfaces in S^n with prescribed Gauss map and mean curvature vector field, *International Journal Mathematics* Vol.17, No.10. (2006) 1-17.