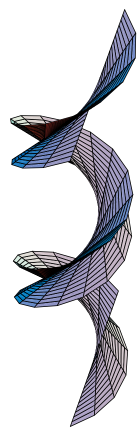
３次元 Euclid 空間の平坦な波面について

梅原雅顕 （阪大・理）

昨年度の修士の学生であった村田里子さんとの共同研究 [7] について紹介します.

(平坦な曲面) $\mathbf{R}^3$ のはめ込まれた曲面で，ガウス曲率が零となるものを「平坦な曲面」と云う．このような曲面は，開かつ稠密な部分集合において接線曲面，錐面，柱面のいずれかからなることが知られている.（接線曲面とは，空間曲線の接線から作られる線織面のことであり，元の空間曲線の部分に特異点をもつ.）下図は特に，つるまき線の接線曲面を描いたもので，特異点は cuspidal edge とよばれるドリルの刃のような形が現れる：



（つるまき線の接線曲面）

完備かつ平坦な曲面については，以下のことが知られている.

Fact([1]) $\mathbf{R}^3$ の平坦な曲面は，平面か柱面に限る.

３次元球面 S^3 には，平坦なトーラスが存在し，北川氏等によって，その性質が深く研究されているが，$\mathbf{R}^3$ においては完備なものは，特別なものだけになってしまう．一方，双曲型空間 H^3 においては，完備かつ平坦な曲面はホロ球面か測地線の管状近傍に限ることが知られており，$\mathbf{R}^3$ より，さらに限られる．ここでは，平坦な曲面を，以下のように特異点をもつ対象「波面」(wave front）にまで拡張して，平坦な波面の大域的な挙動に関して得られた結果を紹介する．上の平坦な曲面に対する大域的な結果については，Massey [6] によるエレガントな証明があり，そこでは以下の補題が重要な役割を演ずる.

補題 1. (Massey の補題) $\gamma(s)$ を平坦な曲面の漸近線とし，s を弧長パラメータとすると平均曲率関数 H の逆数は，この曲線の上に制限すると調和関数となる．つまり漸近線上で

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H(\gamma(s))}\right) = 0$$

を満たす.

(波面の定義) まず，M^2 を２次元多様体とする．C^∞-写像 $f : M^2 \to \mathbf{R}^3$ が**波面**であるとは，

(1) 単位法線ベクトル場 ν が M^2 全体に C^∞-写像として拡張され,
(2) ν を S^2 への写像とみなすと，写像

$$L := (f, \nu) : M^2 \to \mathbf{R}^3 \times S^2 (\cong T_1^* \mathbf{R}^3)$$

が，はめ込みとなる,

ときを云う．さらに，波面 f のガウス写像 $\nu : M^2 \to \mathbf{R}^3$ が至る所，退化するとき，f を**平坦な波面** とよぶ．f が，はめ込みでない点を f の**特異点**とよぶ.

与えられた波面 f に対して，その平行曲面

$$f_t := f + t\nu : M^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

が定まる． f_t のガウス写像は f と共通なので，f が平坦波面ならば，任意の t について f_t は平坦波面となる．物理的には f_t は，初期波形 f の t 時間後の時間発展とみなすことができる．つまり「平坦性は，波の伝搬に関して保存される概念である」ということができる．ところで，$p \in M^2$ を固定したとき f_t が点 p で特異点をもつような t の値は，点 p における（f の）主曲率の逆数が t に一致するときに限ることが知られている．平行曲面に現れる特異点をすべて集めた集合

$$C_f := \{f_t(p) \in \mathbf{R}^3\, ;\, 1/t \text{ は } p \text{ の } (f \text{ の}) \text{ 主曲率のどれかに一致.}\}$$

は，焦面とよばれる．特に f が平坦な曲面のときは，一つの主曲率関数は恒等的に零なので，焦面は臍点以外で定まり，平坦な波面になることが直接計算で確かめられる．このように，平坦性と波面とは非常に相性がよい.（これは S^3 や H^3 でも同様である.）波面の平行曲面について，一般に次の３つの重要な性質がある.

- p が f の特異点なら，高々１点を除くすべての t に関して f_t は p を特異点にもたない.
- 平行曲面は，曲率線を保存する.
- f_t の主曲率の１つを λ_t とすると

$$\frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{\lambda_0} - t$$

が成立する.

最初の性質は，先に述べた焦面の定義の処ですでに指摘した．これらの性質を用いると，漸近線の概念は波面でもそのまま有効で， $1/H$ は平坦波面の臍点以外の点上の滑らかな関数となり，Massey の補題が，平坦な波面においてもそのまま成立することがわかる.

(完備性) ここでは，波面の大域的な扱いを目的とするため，通常のリーマン幾何の「完備性」の概念を以下のように拡張して定義する.

(完備性の定義) 波面 $f : M^2 \to \mathbf{R}^3$ が**完備**とは，M^2 上に，コンパクトな台をもつ対称テンソル場 T が存在し，f の第一基本形式 ds^2 との和 $T + ds^2$ が，M^2 上の完備なリーマン計量を与えるとき，を云う.

ここで定義した「完備性」は,「特異点集合がコンパクト」という強い制約のため普遍被覆をとる操作に関して安定ではない．この定義は，H^3 の平坦な波面に関して [3] で定義した完備性と同じである．もう少し緩い条件として，第一基本形式と第二基本形式の和

$$g := ds^2 + d\nu^2$$

を考える．これは f が波面なら，正定値となるが g がリーマン計量として完備になるとき**弱完備**という．H^3 の平坦な波面については,「弱完備で g が有限全曲率をもち，特異点集合がコンパクト」であることと完備性が同値となるが ([5])，$\mathbf{R}^3$ の場合には，ちょっと異なり，以下のことが示せる．

(命題) ([7]) $\mathbf{R}^3$ の平坦な波面 f について，以下の 2 つは同値である．

(1) f は弱完備かつ特異点集合がコンパクト,
(2) f は完備.

すでに H^3 の平坦な曲面については，論文 [3], [4], [5] において，同様の完備性の定義のもと，完備な平坦波面の具体例の構成やその性質，特異点の形状について，充分な研究がなされている．ただし，H^3 の場合には，Weierstrass 型の表現公式があり，関数論的な手法が使えるのに対し，$\mathbf{R}^3$ の平坦波面については，上述の平坦波面に関する一般化された Massey の補題を駆使した特殊な手法が必要となる．以下，得られた主結果を順に紹介する．

(定理 A)([7]) 完備な平坦波面は，向き付け可能である．さらに特異点を許せば，臍点は存在しない．

f は特異点を許容するので，大域的な単位法線ベクトル場の存在しても M^2 の向き付け可能性を意味しない．この定理は，もう少し条件をゆるめて，f が波面ではなく，各点の近傍で「波面」である，という仮定の下でも成り立つ．H^3 の平坦な波面は [5] で示したように，完備性の仮定なしで向き付け可能性が従うが，$\mathbf{R}^3$ や S^3 では平坦なメビウスの帯の存在が知られており ([10],[2])，完備性の仮定は不可欠である．定理の第二の主張は，今回示した定理の中で一番深いもので，以外なことに「特異点と臍点は完備性の下では両立しない」という結論を得た．このことが鍵となって以下の主張が得られる．

(定理 B)([7]) $\xi : S^1 \to S^2$ を単位球面上の変曲点を持たない正則曲線とし，α を S^1 上の一次微分形式で，$\xi\alpha$ が exact な R^3-valued 1-from を定めているとすると

$$f(u,v) := v\xi(u) + \int_o^u \alpha\xi \qquad (u \in S^1, v \in \mathbf{R})$$

によって定まる写像 $f : S^1 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ は,（特異点をもつ）完備な平坦波面を定める．逆に，特異点をもつ完備な平坦波面はすべてこのようにして得られる．

この定理において球面曲線 $\xi(u)$ は，曲面の漸近的ガウス写像の像と一致するので漸近ガウス曲線とよぶ．一方，完備な平坦な波面のガウス写像の像も球面上の正則曲線となり，$\nu(u)$ の形で表すことができる．2 つの球面曲線は，互いに一方の単位法線ベクトルを与えているという意味で，互いに双対の関係にあり，$\nu(u)$ が卵形線になることと $\xi(u)$ が卵形線になることは同値である．定理 B を用いてさらに以下の結果を得た．

(定理 C)([7]) 特異点をもつ完備な平坦波面は，円柱に同相である．さらに次の 3 つの主張は互いに同値である．

(1) 一つのエンドが 充分遠方で埋め込みであること．
(2) 両方のエンドが 充分遠方で埋め込みであること．
(3) ガウス写像の像が S^2 上の（ある半球内の）卵形線になること．

この定理は，$\mathbf{R}^3$ の極小曲面，H^3 の CMC-1 曲面，H^3 の CMC-1 平坦波面について成り立つ Osserman 型の不等式の類似とみなすことができる．下図は，埋め込まれたエンドをもつ完備な平坦波面の典型例である．証明は，定理 B の

表現公式を用いて，各エンドが充分遠方においては錐面で，近似できることを示すことで証明される．

例 φ を実数で $|\varphi| < \pi/2$ を満たすとする．球面上の小円を

$$\xi_\varphi(u) = (\cos u \cos\varphi, \sin u \cos\varphi, \sin\varphi) \qquad (u \in [0, 2\pi)),$$

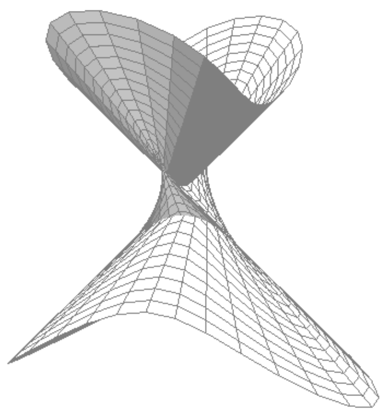
によって表示する．一方，自然数 $n(\geq 2)$ に対して S^1 上の１次微分形式を

$$\alpha = (\cos nu)du.$$

によって定めると，定理Ｂの表現公式によって定まる平坦波面

$$f(u,v) = v\xi(u) + \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{n^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos\varphi}{n^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\cos u & -\sin u & 0 \\ n\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(nu) \\ \cos(nu) \\ \sin(nu) \end{pmatrix}$$

は，完備な平坦波面となる (下図 参照)．ガウス写像の像は小円なので，定理Ｃよりこの曲面は充分遠方では自己交叉しない．



（埋め込まれたエンドをもつ完備な平坦波面）

ここでは，詳しく述べなかったが，弱完備な平坦な波面についても定理Ｂと同様の表現公式が示せる．弱完備な平坦波面の平行曲面や焦面も弱完備なので，この範疇まで一般化しておけば，平坦波面の大域的な研究の枠組みとしては，ほぼ充分と思われる．

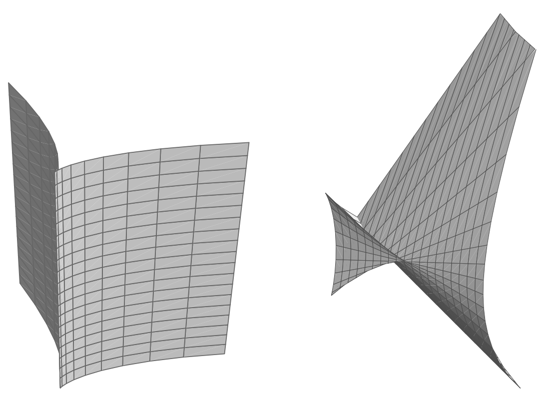


Figure 1. Cuspidal edge と Swallowtail.

上図は Cuspidal edge（カスプ状曲面）と Swallowtail（ツバメの尾）とよばれる，波面によく現れる特異点の典型例である．最後に，完備な平坦波面に現れる特異点について（定理 B の応用として）得られた定理を紹介する．

(命題)([7]) $\mathbf{R}^3$ の完備平坦波面 f が実解析的で，さらにそのガウス写像の像としての球面曲線の縮閉線が，高々 3/2-カスプ点しか許容しなければ，有限個の実数値 $t_1, ..., t_n$ を除いて，f の平行曲面 f_t $(t \neq t_1, ..., t_n)$ は，cuspidal edge と swallowtail のみを特異点として許容する完備平坦波面となる．

参 考 文 献

[1] P. Hartman and L. Nirenberg, *On spherical image whose Jacobians do not change signs*, Amer. J. Math. 81 (1959) 901–920.

[2] J. A. Gálvez and P. Mira, *Isometric immersions of* $\mathbf{R}^2$ *into* $\mathbf{R}^4$ *and perturbation of Hopf tori*, preprint.

[3] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math., **216** (2004) 149–175.

[4] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada: *Singularities of flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math. 221 (2005) 303–351.

[5] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada: *Flat fronts in hyperbolic* 3*-space and their caustics*, to appear (math.DG/0511012).

[6] W.S.Massey, *Surfaces of Gaussian Curvature Zero in Euclidean Space*, Tohoku Math. J. 14 (1962) 73–79.

[7] S. Murata and M. Umehara, *Flat Surfaces with singularities in Euclidean 3-space* , preprint (math.DG/0605604).

[8] J.J.Stoker, *Developable Surface in the Large*, Comm. Pure and Appl. Math. 14 (1961) 627–635.

[9] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Geometry of fronts*, to appear (math.DG/0503236).

[10] W. Wunderlich, *Über ein abwickelbares Möbiusband*, Monatsh. Math. 66 (1962) 276–289.