サブリーマン多様体上の測地線について

東京理科大学理工学部 PD 研究員
北川　友美子

1 Introduction.

滑らかな多様体上の接分布と，その上のリーマンファイバー計量の組をサブリーマン多様体と呼びます．このリーマンファイバー計量はカルノ・カラテオドリー計量とも呼ばれ，工学の世界では制御理論における最適制御に深く関係しています．例えば，テザーと呼ばれる細い紐のようなものでつながれた二つの衛星の伸展・回収制御の最適制御を議論するうえで用いられたりするようです．

ここでは特に接分布が，そのセクションのブラケット積達で接空間全体を張るという条件をみたすようなものを考えます．この条件は，bracket-generating または非ホロノミーと呼ばれています．このようなサブリーマン多様体の測地線を調べました．

多様体上の接分布の構造は，サブリーマン多様体に密接に関係していて，様々な問題を考える上での出発点となりますので少し紹介しておきます．

非ホロノミーであるような接分布の代表的なものとして，Martinet 分布，接触構造，Engel 構造，カルタンの分布などが挙げられます．Martinet 分布は 3 次元の多様体の上の 2 次元の分布ですが，特異点をもつため，2 回のブラケット積でやっと 3 次元の接空間を張ることができます．これは非常に扱いにくい分布です．接触構造はよく知られていますが，余次元 1 で非退化なものです．これは 1 回のブラケット積で接空間全体を張るという美しい構造をしています．Martinet 分布に比べても非常に扱いやすい対象です．Engel 構造は 4 次元の多様体上の 2 次元の接分布で，これも 1 回のブラケット積によって 1 次元ずつ次元が上がります．つまり，2 回ブラケットを繰り返すと 4 次元の接空間を張ります．Engel 構造は，接触構造と同様に局所的な不変量をもたない珍しい分布のひとつです．3 次元の接触トポロジーというものがありますが，この Engel 構造に対するトポロジーも注目すべき研究対象であると思います．そして，カルタンの分布というのは，5 次元の多様体上の 2 次元の分布で，1 回のブラケット積で 1 次元上がり 2 回目を施すと 5 次元の接空間を張ってしまうような，特徴的な構造を持っています．E.Cartan によりその自己同型群は 14 次元以下であり，最大次元を持つものは例外型のリー群 G_2 に同型となることが示されています．簡単に言うと，これらの接分布にリーマンファイバー計量を入れたものが，サブリーマン多様体です．

リーマン多様体において 2 点を結ぶ最短線は測地線によって与えられ，測地線は局所的には最短となることが知られています．測地線は，通常，局所座標を用いて 2 階の常微分方程式で定義されますが，シンプレクティックの言葉を用いると，ハミルトンベクトル場の積分曲線を多様体に落としたものが測地線です．

サブリーマン幾何においては，2 点を結ぶ最短線を求める問題はリーマン幾何の場合より複雑な問題となります．リーマン幾何では変分法が用いられ，曲線を摂動させることによって求められますが，サブリーマン幾何では摂動を許さない曲線が存在することがあり，変分法では解くことができなくなるためです．

接分布とその上のリーマンファイバー計量から決まるエネルギーをとり，それに対応するベクトル場の積分曲線を多様体に射影したものを考えます．これを *normal geodesic* といいます．これは，リーマン幾何の場合と同様に，局所的には最短となります．最初，サブリーマン幾何における測地線はこれだけだと思われていましたが，1990 年代に，R. Montgomery らによって局所的にも最短とならないような特殊なものが発見されました．これは *abnormal geodesic* と呼ばれ，リーマン幾何には現れないサブリーマン幾何特有のもので，注目すべき研究対象です．余接束上に，計量にはよらずに接分布のみから決まる特性方程式が定義され，これをみたす余接束上の曲線を多様体に射影したものを *abnormal geodesic* と呼びます．Optimal Control Theory における最大値原理によりサブリーマン多様体の最短線は normal geodesic であるか，abnormal geodesic のどちらかであること

が知られています．そこで，カルタンの分布において，normal geodesic と abnormal geodesic の様子を詳しく調べました．余次元が 2 より小さい接分布に対しては，abnormal geodesic は現れないので，余次元 2 以上の接分布を対象にしてこれらの例を作ることが今後の課題です.

2 Nonholonomic distributions.

多様体 M 上の接分布 D が，非ホロノームまたは *bracket-generating* であるとは，M の開集合 U 上の D の基底 $\{X_1, \dots, X_r\}$ にたいして，X_i $(i = 1, ..., r)$ のブラケット積達で生成されるベクトル場全体の集合 $\{X_i, [X_i, X_j], [X_i, [X_j, X_k]], \dots\}_{i,j,k=1,..,r}$ が接束 TU を張るときをいいます.
M が連結で，D が bracket-generating であるとき，M の任意の 2 点 p, q を結ぶ D の積分曲線が必ず存在することが知られています（Chow の定理）.

3 The Sub-Riemannain distance.

M を滑らかな多様体，D をその上の接分布とし，g を D 上のリーマンファイバー計量とするとき組 (M, D, g) をサブリーマン多様体と呼びます．(M, D, g) の点 $p \in M$ と $v \in D_p$ にたいして v の長さ $\|v\|_g$ を，

$$\|v\|_g = g_p(v, v)^{\frac{1}{2}}$$

で定め，$\gamma : [a, b] \to M$ を D の積分曲線とするとき, γ の長さを

$$\|\gamma\|_g = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt$$

で定めます．ただし，γ が積分曲線でないときは，$\|\gamma\|_g = +\infty$ としています．さらに，関数 $d_g : M \times M \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ を

$$d_g(p, q) = \inf\{\|\gamma\|_g; \partial\gamma = (p, q)\}$$

で定めます．ここで $\partial\gamma = (\gamma(a), \gamma(b))$ です. M が連結かつ D が bracket-generating であるとき，関数 $d_g : M \times M \to \mathbf{R}$ は M 上の距離関数となり，M の位相を引き起こします．この関数 d はサブリーマン距離またはカルノ・カラテオドリー距離と呼ばれています．D の積分曲線 $\gamma : [a, b] \to M$ が $d_g(\gamma(a), \gamma(b)) = \|\gamma\|_g$ をみたすとき，γ を *minimizer* と呼びます.

4 Normal geodesics.

(M, D, g) をサブリーマン多様体とします．$(p, \lambda) \in T^*M$ にたいして $\|\lambda\|_g$ を $\lambda|_{g_p}$ のノルムとします．このとき (D, g) のエネルギー関数 $E : T^*M \to \mathbf{R}$ が

$$E(x, \lambda) = -\frac{1}{2}\|\lambda\|_g^2$$

で与えられます．このエネルギーにたいして，*normal geodesic* が次のように定義されます：
$\Gamma : I \to T^*M$ で

(i) $\dot{\Gamma}(t) = \overrightarrow{E}_{\Gamma(t)}$

(ii) E は Γ の沿って消えない.

を満たすものを M に射影したものを *normal geodesic* とよびます.
すべての normal geodesic は local minimizer であることが知られています.

5 Abnormal geodesics.

(M, D, g) をサブリーマン多様体とし，$\{X_1, \ldots, X_r\}$ を $U \subset M$ 上の D の基とします．また，関数 $H_{X_i} : T^*M \to \mathbf{R}$ を $H_{X_i} = \langle \lambda, X_i(p) \rangle$ $(i = 1, ..., r)$ で定めます．このとき，D の *abnormal geodesic* は以下のように定義されます：
曲線 $\Gamma : I \to T^*M \backslash \{O\}$ で

$$\begin{cases} \text{(i) } H_{X_i}(\Gamma(t)) = 0 & \text{for all } t \in I \text{ and } i = 1, \ldots, r \\ \text{(ii) } \dot{\Gamma}(t) \in \langle (\overrightarrow{H_{X_1}})_{\Gamma(t)}, \ldots, (\overrightarrow{H_{X_r}})_{\Gamma(t)} \rangle & \text{for almost all } t \in I \end{cases}$$

を満たすものを M に射影したものを *abnormal geodesic* とよびます.

6 The standard Cartan distribution.

$(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ を $\mathbf{R}^5$ の標準座標とし，ベクトル場 $X_1, \ldots, X_5$ を

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial x^3} - (x^3 - \frac{1}{2}x^1x^2)\frac{\partial}{\partial x^4}$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^1\frac{\partial}{\partial x^3} - (x^3 + \frac{1}{2}x^1x^2)\frac{\partial}{\partial x^4}$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial x^4},\ X_5 = \frac{\partial}{\partial x^5}.$$

で定めます．これらのベクトル場は次の関係を満たしています：

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = X_4 \\ [X_2, X_3] = X_5 \\ \text{The others are trivial} \end{cases}$$

また，D を X_1 と X_2 で張られるように取ります．つまり，

$$\Gamma(D) = \langle X_1, X_2 \rangle$$

とします．このとき，D のリーマンファイバー計量 g を $\{X_1(p), X_2(p)\}$ が D_p の正規直交基となるようにとります.
このようなサブリーマン多様体 $(\mathbf{R}^5, D, g)$ を考え，この上の normal geodesic と abnormal geodesic の様子を詳しく調べ報告しました．詳しい計算結果は [1] を参照していただければ幸いです.

References

[1] Yumiko Kitagawa, The infinitesimal automorphisms of a homogeneous subriemannian contact manifold, 奈良女子大学博士論文（2005).