スカラー曲率 0 な超曲面の構成

岡安　隆　　　　　茨城大学教育学部

1　Introduction

ユークリッド空間の完備な超曲面で，スカラー曲率が恒等的に 0 であるもので現在知られているものは，平面曲線 $\times\mathbf{R}^{n-1}$ で表される一般化された円柱，さらに回転超曲面と， $O(p)\times O(p)$-不変超曲面 （[2], [3]) だけである．スカラー曲率 $=0$ という条件は次元が高ければ大変弱いと考えられるので，この結果は以外である．

この小論の目的は,（境界付きの）完備な超曲面でスカラー曲率 $=0$ を満たす超曲面が非常に自由度が高いことを，回転超曲面をもとに示すことである．証明の基本的なアイデアは Fachi-Pacard [1] による．

2　回転超曲面の共形パラメータ表示

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\times S^{n-1} &\to \mathbf{R}^{n+1}\\ (t,\ \theta) &\mapsto (\rho(t)\theta,\ t)\end{aligned}$$

で定まる回転超曲面のスカラー曲率 τ は

$$\tau=-2(n-1)\frac{\ddot\rho}{\rho(\dot\rho^2+1)^2}+(n-1)(n-2)\frac{1}{\rho^2(\dot\rho^2+1)}$$

となる． $\tau\equiv 0$ は積分できて, $\dot\rho^2+1=c\rho^{n-2}$ （c: 定数）となる．たとえば, $n=4,\ c=1$ のとき $\rho=\cosh t$ が解になる．また，$n>4$ のとき，t-方向に有界な解曲線になる．以下のセクションの計算が簡単になるように，円柱に共形同値なパラメータ表示に変更する．

$$\begin{cases}\varphi'^2+\varphi^{4-n}=\varphi^2, & \varphi(0)=1,\\ \psi'=\varphi^{(4-n)/2}, & \psi(0)=1\end{cases}$$

で定まる関数を用いて，

$$X_0:\mathbf{R}\times S^{n-1}\to\mathbf{R}^{n+1},\qquad X_0(s,\ \theta)=(\varphi(s)\theta,\ \psi(s))$$

と定義すると，この超曲面 C_1（“Catenoid Type” hypersurface）はスカラー曲率 0 となる回転面となり，平坦な 2 つの end をもつ．さらに，リーマン計量が $g=\varphi^2(ds^2+d\theta^2)$ と書けることが分かる．

3 回転超曲面 C_1 に近いスカラー曲率 0 な超曲面

N_0 を C_1 の単位法ベクトル場とする．C_1 上の小さな関数 w を使って

$$X_w = X_0 + wN_0$$

と定義される C_1 に近い超曲面 M を考える（図 1 参照）．

M のスカラー曲率 0 を表す方程式は

$$\partial_s\left(\varphi^{\frac{n}{2}-2}\partial_s w\right)+\frac{n-2}{2(n-1)}\varphi^{\frac{n}{2}-2}\Delta_{S^{n-1}}w+\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi^{-\frac{n}{2}}w=Q(w).$$

となる．左辺を $\mathcal{L}_0 w$ と置く．(右辺 $Q(w)$ は <u>非線形項</u>，後で説明する）

$\mathcal{L}_0$ に共役な作用素で書き換えると方程式がきれいになる．

$$\mathcal{L}=\varphi^{1-n/4}\mathcal{L}_0\varphi^{1-n/4}$$

を用いると

$$\mathcal{L}=\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{n-2}{2(n-1)}\Delta_{S^{n-1}}-\left(\frac{n-4}{4}\right)^2+\frac{n}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)\varphi^{2-n}.$$

命題 1

$$\widetilde{X}_w = X_0 + w\varphi^{(4-n)/4}N_0$$

で定義される超曲面 M のスカラー曲率 τ が 0 となる必要十分条件は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w = \quad & \varphi^{(4-n)/4}Q_2\left(s,\varphi^{-n/4}w,\nabla\left(\varphi^{-n/4}w\right),\nabla^2\left(\varphi^{-n/4}w\right)\right)\\ & +\varphi^{n/4}Q_3\left(s,\varphi^{-n/4}w,\nabla\left(\varphi^{-n/4}w\right),\nabla^2\left(\varphi^{-n/4}w\right)\right).\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ をヤコビ作用素という．また，$Q_2(s,q_1,q_2,q_3)$ は 2 次の同次多項式であり，$Q_3(s,q_1,q_2,q_3)$ は より高次の項を集めたものである．つまり，

$$Q_3(s,0,0,0)=0,\quad \nabla_{q_i}Q_3(s,0,0,0)=0,\quad \nabla^2_{q_iq_j}Q_3(s,0,0,0)=0$$

となる．さらに，q_1,q_2,q_3 で展開したとき $(0,0,0)$ のある近傍で，Q_2，Q_3 の係数とその高階微分が s の関数としてすべて有界となることも分かる．

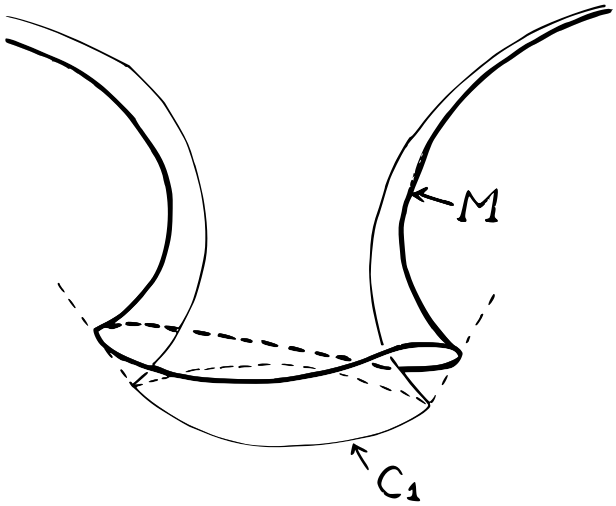

図 1: M の概念図

命題 2

$$\mathcal{L}w = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{n-2}{2(n-1)}\Delta_{S^{n-1}} - \left(\frac{n-4}{4}\right)^2 + \frac{n}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)\varphi^{2-n}\right) w = 0$$

$$\text{on } (s_1,\ s_2) \times S^{n-1} \quad (n > 4)$$
$$(-\infty \le s_1 < s_2 \le \infty)$$

の解 w が，さらに次の 2 条件
1) w: 有界（s_i が有限のときは，さらに $w(s_i, \cdot) = 0$ を仮定する）.
2) 任意の $s \in (s_1,\ s_2)$ で $w(s,\ \cdot)$ が $e_1, \ldots, e_n$ と S^{n-1} 上の L^2-内積で直交する.
を満たすとするならば，$w = 0$ となる.

[1] にしたがって，$\mathcal{L}$ の性質を解析するために "重み付き Hölder space" を考える.

任意の $\delta \in \mathbf{R}$, $S \in \mathbf{R}$ に対して，$C^{k,\alpha}_{\delta}([S,\ +\infty) \times S^{n-1})$ を次のノルムについて有界な関数 $w \in C^{k,\alpha}([S,\ +\infty) \times S^{n-1})$ の作る空間と定める.

$$||w||_{k,\alpha,\delta} \equiv \sup_{s \ge S} |e^{-\delta s} w|_{k,\alpha([s,s+1]\times S^{n-1})}.$$

つぎの命題が鍵である.

命題 3　$n > 4$ とし, $\alpha \in (0, 1)$, $\delta \in \left(-\sqrt{\left(\frac{n-4}{4}\right)^2 + \frac{n(n-2)}{n-1}},\ -\frac{n}{4}\right)$ を固定する．このとき任意の $S \in \mathbf{R}$ と，任意の $f \in C^{0,\alpha}_{\delta}([S,\ +\infty) \times S^{n-1})$ に対して方程式

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = f & \text{in}\ \ (S,\ +\infty) \times S^{n-1}, \\ w \in \mathrm{Span}\{e_0, e_1, \ldots e_n\} & \text{on}\ \ \{S\} \times S^{n-1} \end{cases}$$

が $C^{2,\alpha}_{\delta}([S,\ +\infty) \times S^{n-1})$ の中に一意的な解 $w := \mathcal{G}_S(f)$ をもつ．ここで $e_0, e_1, \ldots e_n$ は $\Delta_{S^{n-1}}$ の固有値 $\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = n-1$ に対応する固有関数である.
さらに

- f, S に独立な定数 C が存在し次の不等式が成り立つ.
  $||\mathcal{G}_S(f)||_{2,\alpha,\delta} \leq C||f||_{0,\alpha,\delta}$.
- $\forall s \in [S,\ \infty)$ に対して $f(s,\ \cdot)$ が $e_0, e_1, \ldots, e_n$ に S^{n-1} 上の L^2-内積で直交するならば，$w = \mathcal{G}_S(f)$ もその性質をもつ.

定理　任意の $n > 4$, $S \in \mathbf{R}$ に対し，$||g_{\mathrm{II}}||_{2,\alpha}$ を十分小さくとれば

$$\begin{cases} \widetilde{X}_w = X_0 + w\varphi^{(4-n)/4}N_0 & \text{in}\ (S,\ +\infty) \times S^{n-1} \\ \pi_{\mathrm{II}}w = g_{\mathrm{II}} & \text{on}\ \{S\} \times S^{n-1}. \end{cases}$$

となる超曲面でスカラー曲率 0 となるものが存在する（M は C_1 に漸近的に収束する）．ただし π_{II} は $\Delta_{S^{n-1}}$ の $n+2$ 番目以上の固有値に対応する固有関数の作る空間への直交射影である.

定理の証明のアウトライン

1°

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{w} = 0 & \text{in}\ \ (S,\ +\infty) \times S^{n-1}, \\ \tilde{w} = g_{\mathrm{II}} & \text{on}\ \ \{S\} \times S^{n-1} \end{cases}$$

が「命題 3」を用いて解ける（一意性もいえる）.

2°　$w = \tilde{w} + v$ とおくと，問題は

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = Q(\tilde{w} + v) & \text{in}\ \ (S,\ +\infty) \times S^{n-1}, \\ \pi_{\mathrm{II}}v = 0 & \text{on}\ \ \{S\} \times S^{n-1} \end{cases}$$

を $v \in C^{2,\alpha}_{\delta}([S,\ +\infty) \times S^{n-1})$ で解くことに帰着される.

3°　$\mathcal{N}_S(v) := \mathcal{G}_S(Q(\tilde{w} + v))$ と置くと

$$\mathcal{N}_S(v) = v$$

をみたす解を見つければよい.

4°

$$\begin{aligned} ||\mathcal{N}_S(0)||_{2,\alpha,\delta} &= ||\mathcal{G}_S(Q(\tilde{w}))||_{2,\alpha,\delta} \\ &\leq c||(Q(\tilde{w}))||_{0,\alpha,\delta} \leq c||\tilde{w}||_{2,\alpha,\delta} \\ &\leq ce^{-\delta S}||g_{\mathrm{II}}||_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

5°

$$\begin{aligned} ||\mathcal{N}_S(v_1) &- \mathcal{N}_S(v_2)||_{2,\alpha,\delta} \\ &= ||\mathcal{G}_S\left(Q(v_1+\tilde{w}) - Q(v_2+\tilde{w})\right)||_{2,\alpha,\delta} \\ &\leq c||Q(v_1+\tilde{w}) - Q(v_2+\tilde{w})||_{0,\alpha,\delta} \\ &\leq c(g_{\mathrm{II}})||v_1 - v_2||_{2,\alpha} \leq \frac{1}{2}||v_1 - v_2||_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

ここで 2 番目の不等式に出てくる $c(g_{\mathrm{II}})$ は g_{II} に依存する定数であるが，$||g_{\mathrm{II}}||_{2,\alpha}$ を小さくすれば 1/2 より小さくなることを用いた.

6°　4°, 5° より，$||g_{\mathrm{II}}||_{2,\alpha}$ を（δ, S に応じて）十分小さくとれば，十分小さい ball $B = \{v \in C^{2,\alpha}_\delta([S,\ +\infty) \times S^{n-1}) |\ \ ||v|| < \epsilon\}$ に対して写像

$$\mathcal{N}_S : B \to B$$

を定義することができ，さらに縮小写像になることが分かった．よって，不動点定理が適用できて $\mathcal{N}_S(v) = v$ の解の存在が言え，定理の証明が終わる.

参考文献

[1] S. Fakhi and F. Pacard, *Existence result for minimal hypersurfaces with a prescribed finite number of planar ends*, Manuscripta Math. 103 (2000), 465–512.

[2] O. Palmas, O(2) × O(2)-*invariant hypersurfaces with zero scalar curvature*, Arch. Math. (Basel) 74 (2000), no. 3, 226–233.

[3] J. Sato, O(p+1) × O(p+1)-*invariant hypersurfaces with zero scalar curvature in Euclidean space*, An. Acad. Brasil. Cienc. 72 (2000), no. 2, 109–115.