複素双曲線上の曲線の運動

藤岡敦 (一橋大学)

§1. 序

連続な世界における現象が微分方程式により記述されるのに対し, 離散な世界における現象は差分方程式により記述される ([1]). 関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ の微分

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

を近似する差分には差分間隔 $\varepsilon > 0$ を用いて定義される前進差分および後退差分

$$\Delta_{+x} f(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \Delta_{-x} f(x) = \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

の他, 中心差分や不等間隔差分といった様々なものが現れる. このため, 離散な世界では連続な世界において対応する微分方程式の性質を保つような適切な差分を考えなければならない.

なお, 以下に現れるように差分は数列に対しても定義することができる. 例えば, 数列 $\{a_n\}$ に対し前進差分は

$$\Delta_{+n} a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{\varepsilon}$$

となる.

最も基本的と思われる例として, Laplace 方程式

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

の離散化について考えてみよう. $\{u_{m,n}\}$ を 2 重数列とすると, 差分 Laplace 方程式は m, n に対する差分間隔を等しく選んでおいた上で

$$\Delta_{-m} \Delta_{+m} u_{m,n} + \Delta_{-n} \Delta_{+n} u_{m,n} = 0$$

とするのが適切であるといえる. それは上の式は

$$u_{m,n} = \frac{u_{m+1,n} + u_{m,n+1} + u_{m-1,n} + u_{m,n-1}}{4}$$

と同値であり, 調和関数のときと同様に平均値の性質や最大値原理が成り立つからである.

§2. Burgers 方程式

次節で現れる例として, Burgers 方程式

$$\kappa_t = \kappa_{ss} + 2\kappa\kappa_s$$

の離散化について述べる. これは非線形な方程式で流体の 1 次元衝撃波の運動を記述するモデルとして知られている. ここで, 拡散方程式

$$\tau_t = \tau_{ss}$$

の解 τ に対し Cole-Hofp 変換

$$\kappa = (\log \tau)_s$$

を行うと, κ は Burgers 方程式の解となることが分かる. よって, Burgers 方程式の離散化は拡散方程式と Cole-Hopf 変換も込みで考えるのが適切であろう. そこで, まず差分拡散方程式を

$$\frac{1}{\varepsilon}(\tau_{j,n+1} - \tau_{j,n}) = \frac{1}{\delta^2}(\tau_{j+1,n} - 2\tau_{j,n} + \tau_{j-1,n})$$

により定める. 但し, $\varepsilon, \delta > 0$ はそれぞれ n, j に対する差分間隔で, 差分 Laplace 方程式の場合に倣い, s に関する 2 階微分の離散化は前進差分と後退差分の両方を用いている. 上の式は変形すれば

$$\tau_{j,n+1} = \alpha\tau_{j+1,n} + (1-2\alpha)\tau_{j,n} + \alpha\tau_{j-1,n} \quad \left(\alpha = \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right)$$

と同値である. 差分 Cole-Hopf 変換は差分間隔を 1 としておけば

$$\kappa_{j,n} = \log \tau_{j+1,n} - \log \tau_{j,n}$$

と定めるべきであるが, 式の表示を簡単にするため, 改めて

$$\kappa_{j,n} = \frac{\tau_{j+1,n}}{\tau_{j,n}}$$

とおく. 直接計算することにより, 差分 Burgers 方程式

$$\kappa_{j,n+1} = \kappa_{j,n} \frac{\alpha\kappa_{j+1,n} + 1 - 2\alpha + \alpha/\kappa_{j,n}}{\alpha\kappa_{j,n} + 1 - 2\alpha + \alpha/\kappa_{j-1,n}}$$

を得る.

§3. 複素双曲線上の曲線の運動

必ずしも離散化を伴わない曲線の運動については歴史は古く例えば [4] が詳しいが, 離散化を伴う結果は曲線の離散時間発展を定義するための困難さのため, 恐らく [3] に見られる他は以下に述べる複素双曲線上の曲線の運動の場合のみのようである ([2]).

複素双曲線上の曲線の運動は

$$\gamma = \gamma(s,t) : I \times J \to \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 | zw = 1\}$$

と表される. 但し, I, J は区間で, s は曲線のパラメータ, t は時間を表す. 以下, 時間を固定するごとに $\gamma(\ \cdot\ , t)$ ははめ込みであるとする. このとき, $\gamma = (z, w)$ とおくと, $zw = 1$ だから,

$$z_s, w_s \neq 0$$

が成り立つ. また,

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z & \dfrac{1}{z} \\ z_s & -\dfrac{z_s}{z^2} \end{pmatrix} = -2\frac{z_s}{z} \neq 0$$

だから, γ, γ_s は 1 次独立である. よって, γ の時間発展は γ, γ_s の 1 次結合で表されるはずであるが, $zw = 1$ だから, 関数 $\mu : I \times J \to \mathbf{C}$ を用いて

$$\gamma_t = \mu \gamma_s$$

と表されることが分かる. このとき, γ, γ_s は連立線形方程式

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tau^2 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \tau^2 \mu & \mu_s + \kappa\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix}$$

をみたすことが分かる. 但し,

$$\tau = \frac{z_s}{z},\ \kappa = \frac{\tau_s}{\tau}$$

とおいた. κ は γ の曲率のようなものである. 更に, この方程式の積分可能条件は

$$\tau_t = \tau \mu_s + \tau_s \mu$$

となる.

上において $\mu = \kappa$ の場合を考えると, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) κ は Burgers 方程式をみたす.

(ii) 離散化を考えることができる.

(i) は直接計算すればよく, (ii) については $\log z, \log w$ も拡散方程式をみたすことから従う.

更に議論を進めると, 高次の運動の離散化やハミルトン系による定式化を考えることができる.

参考文献

[1] 広田良吾, 差分方程式講義, サイエンス社, 2000.

[2] A. Fujioka and T. Kurose, Motions of curves in the complex hyperbola and the Burgers hierarchy, preprint.

[3] T. Hoffmann and N. Kutz, Discrete curves in $\mathbb{CP}^1$ and the Toda lattice, Stud. Appl. Math. **113**, 31–55 (2004).

[4] C. Rogers and W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.