H^3 内の平均曲率一定曲面の構成について

東京電機大学 小林 真平

1 H^3 内の平均曲率一定曲面

4 次元ミンコフスキー空間 $E^{3,1}$ を エルミート行列 Herm(2) と同一視すると、3 次元双曲空間は $H^3 = \{a \in \mathrm{Herm}(2) \mid \det a = 1,\ \mathrm{tr}\ a > 0\}$ と実現できる。D を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし f を D から H^3 への共形的な等長はめ込みとする。この同一視を用いると、曲面 f の動標構 $F = (f,\ e^{-u/2}f_x,\ e^{-u/2}f_y,\ N)$, (ここで N は f, f_x, f_y に直交する単位法線ベクトル) は $SL(2,\mathbb{C})$ に値を持つ事が分かる。

曲面 f の動標構 F は $z = x+iy$, $\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$、 $\partial_{\bar z} = (\partial_x + i\partial_y)/2$、計量 $ds^2 = e^{u(z,\bar z)}dzd\bar z$、平均曲率 H、ホップ微分 $Q = \langle f_{zz}, N\rangle$ を用いると、次の式を満たす事がわかる [1]。

$$F_z = FU,\ F_{\bar z} = FV, \tag{1.1}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_z/4 & \frac{1}{2}(H+1)e^{u/2} \\ -Qe^{-u/2} & -u_z/4 \end{pmatrix},\quad V = \begin{pmatrix} -u_{\bar z}/4 & \bar Q e^{-u/2} \\ -\frac{1}{2}(H-1)e^{u/2} & u_{\bar z}/4 \end{pmatrix}.$$

また構造方程式は次の様に書ける。

$$u_{z\bar z} + \frac{1}{2}(H^2-1)e^u - 2|Q|^2e^{-u} = 0,$$

$$Q_{\bar z} = \frac{1}{2}H_z e^u.$$

よく知られている様に、平均曲率 H が一定である時、曲面 f に対して平均曲率 $H_\lambda = H$, 計量 $ds^2_\lambda = e^u dzd\bar z$, ホップ微分 $Q_\lambda = \lambda Q,\ \ (\lambda \in S^1)$ である曲面の族 $f_\lambda,\ (\lambda \in S^1)$ が存在する。方程式 (1.1) において、Q を λQ, $\bar Q$ を $\lambda^{-1}Q$ に置き換えた動標構を F_λ で表す。F_λ は D から $\Lambda SL(2,\mathbb{C}) = \{g : S^1 \to SL(2,\mathbb{C});$ 滑らかな写像$\}$ への写像と考える事ができる。 F_λ を **extended framing** と呼ぶ。

Remark. 平均曲率 H は、N の向きを取り換える事によって一般性を失わずに $H \geq 0$ と仮定できる。以下の節では、平均曲率 $H = 1$ の場合の考察は除く。

Remark. Extended framing F_λ を $\tilde{F}_\lambda = F_{\lambda^{-2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda}^{-1} \end{pmatrix}$ で置き換えると $\tilde{F}_\lambda \in \Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma := \{g(\lambda) \in \Lambda SL(2, \mathbb{C}) \mid \sigma g(\lambda) = g(-\lambda)\}$ である。以下の節では $\Lambda SL(2, \mathbb{C})$ の代わりに $\Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma$、$F_\lambda$ の代わりに $\tilde{F}_\lambda$ を用いて議論する。

2 H^3 内の平均曲率一定曲面の generalized Gauss maps

曲面 f に対して、H^3 の単位接束 $T_1 H^3 = \{(x; v) \in TH^3 \mid |v| = 1\} = SL(2, \mathbb{C})/U(1)$ への写像 Φ で $\pi \circ \Phi = f$ となるものを考える (π は $T_1 H^3$ から H^3 への射影)。これを **generalized Gauss map** と呼ぶ。この時、平均曲率一定曲面の特徴付けとして次の定理が知られている。

定理 2.1 ([3]). H^3 内の曲面とその *generalized Gauss map* について次の事は同値である。

(1) 平均曲率 H が一定である。

(2) *Generalized Gauss map* はルジャンドル調和写像である。

Remark. (1) $T_1 H^3$ の計量は、$SL(2, \mathbb{C})$ の killing metric から定まる不定値計量を考える。

(2) Generalized Gauss map がルジャンドルであるという条件は $\langle df, N \rangle = 0$ と書くことができる。従って、f が曲面である限り generalized Gauss map はルジャンドルである。

(3) $SL(2, \mathbb{C})/U(1)$ は 4-対称空間である。従って平均曲率一定曲面の generalized Gauss map は 4-対称空間 $SL(2, \mathbb{C})/U(1)$ へのルジャンドル調和写像を定めている。

$\Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma$ に対して、対合 $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_1 &: g(\lambda) \in \Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma \to \overline{g\left(1/\bar{\lambda}\right)}^{t-1} \in \Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma, \\ \mathfrak{c}_1 &: g(\lambda) \in \Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma \to \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{i} & 0 \\ 0 & \sqrt{i} \end{pmatrix} \overline{g(i/\bar{\lambda})}^{t-1} \in \Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma. \end{aligned}$$

定理 2.2 ([4], [2]). *H^3 内の平均曲率一定曲面とその extended framing F_λ をゲージ変換した $\hat{F}_\lambda$ について次が成立する。*

(1) 平均曲率が $H > 1$ である時、$\mathfrak{c}_1 \hat{F}_\lambda = \hat{F}_\lambda$.

(2) 平均曲率が $0 \leq H < 1$ である時、$\mathfrak{c}_2 \hat{F}_\lambda = \hat{F}_\lambda$.

Remark. extended framing F_λ をゲージ変換した $\hat{F}_\lambda$ も **extended framing** と呼ぶ事にする。

3 Generalized Weierstrass type representation

最後に H^3 内の平均曲率一定曲面 $(0 \leq H < 1, H > 1)$ に対する generalized Weierstrass type representation を簡単に紹介する。

Step1 $\eta(z, \lambda)$ を次で定める単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の微分形式とする。

$$\eta(z,\lambda) = \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \eta_k(z) \lambda^k \right) , \tag{3.1}$$

ここで $\lambda \in \mathbb{C}^*$、 $\eta_k(z)$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ に値を持つ正則一形式とする。また k が偶数 (resp. 奇数) の時、$\eta_k(z)$ を対角 (resp. 非対角) 行列とする。さらに $\eta_{-1}(z)$ の右上の成分は D 上で消えないと仮定する。

Step2 C を次の線形常微分方程式の解とする。

$$dC = C\eta, \quad C(z_*, \lambda) = \mathrm{id}, \tag{3.2}$$

ここで $z_* \in D$ を初期点とする。

Step3 対合 $\mathfrak{c}_1$、 $\mathfrak{c}_2$ を用いると C は次の様に二通りに分解できる。

$$C = F_j V_{+j}, \tag{3.3}$$

ここで $\mathfrak{c}_j F_j = F_j$, $V_{+j} \in \Lambda^+ SL(2, \mathbb{C})_\sigma := \{g(\lambda) \in \Lambda SL(2, \mathbb{C})_\sigma \mid g(\lambda)$ は単位円盤内で λ に関して正則 $\}$。

定理 3.1 ([2]). *F_1 (resp. F_2) は H^3 内の平均曲率が一定 $H > 1$ (resp. $0 \leq H < 1$) である曲面の extended framing になる。*

Step4 実際、平均曲率一定曲面は次の写像 f_j で構成する事ができる (f_1 は平均曲率 $H > 1$、f_2 は平均曲率 $0 \leq H < 1$)。

$$f_j := F_j F_j^*.$$

参考文献

[1] M. Babich and A. Bobenko. Willmore tori with umbilic lines and minimal surfaces in hyperbolic space. *Duke Math. J.*, 72(1):151–185, 1993.

[2] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, and S.-P. Kobayashi. Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop group approach. *In preparation*, 2008.

[3] T. Ishihara. The harmonic Gauss maps in a generalized sense. *J. London Math. Soc. (2)*, 26(1):104–112, 1982.

[4] Shimpei Kobayashi. Real forms of complex surfaces of constant mean curvature. *Submitted*, 2007.