非等方的平均曲率一定曲面の安定性と一意性について

小磯深幸 (Miyuki Koiso)

奈良女子大学理学部 (Nara Women's University)

1　序

幾何学における重要な研究課題の一つとして，曲面の変分問題の解についての研究がある．この種の問題で最も古くから研究されているものとしては，極小曲面と平均曲率一定 (constant mean curvature. 以下では CMC と記す) 曲面がある．前者は面積 (汎関数) の臨界点，後者は「囲む体積」を保つ変分に対する面積の臨界点であり，それぞれ，例えば石鹸膜，シャボン玉 (の膜) の数学的モデルを与えると言われることがある．これは，液体の表面張力は，表面の向きに依らず，表面積に比例すると考えられるからである．ところが，たとえば結晶のように異方性を持つ物質の形状については，エネルギーとして面積汎関数を考えるだけでは十分でなく，より一般の，エネルギー密度が表面の法線方向に依存するような「非等方的表面エネルギー」を考える必要がある．物理的にも自然な変分問題は，「体積一定」なる付加的条件のもとでの非等方的表面エネルギーの臨界点についての研究であろう．解は非等方的平均曲率一定 (constant anisotropic mean curvature. 以下では CAMC と記す) 曲面と呼ばれ，CMC 曲面の一般化となっている．

筆者の現在の研究課題は，一つには，CAMC 曲面そのものについて研究することである．そこでは，CMC 曲面について知られている結果を CAMC 曲面に対して一般化するだけでなく，より一般的な見方をすることにより，CMC 曲面についても新しい結果を得ることを目指している．たとえば，[1] で得た CAMC 回転面に対する表現公式は，CMC 回転面 (Delaunay 曲面) に対しても新しいものであり，Delaunay 曲面の研究に対しても非常に有用である．たとえば，後で紹介する定理 3.3, 3.4, 3.5 の証明にはこの公式が有効に使われるが，定理 3.5 は CMC 曲面に対しても新しいものである．もう一つの研究課題は，CAMC 曲面の研究を通して，さまざまな変分問題の解に対して応用可能な一般理論を見出すことである．なお，以下で述べる事柄は，Bennett Palmer 氏 (Idaho State University, USA) との最近の共同研究の成果の一部である．

さて今，$F : S^n \to \mathbf{R}^+$ を正値 C^∞ 級関数とする．$X : \Sigma = \Sigma^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ をはめ込みとし，その Gauss 写像を $\nu : \Sigma \to S^n$ で表す．

$$\mathcal{F}(X) := \int_\Sigma F(\nu)\, d\Sigma, \qquad V(X) := \frac{1}{n+1}\int_\Sigma \langle X, \nu\rangle\, d\Sigma \tag{1}$$

とおく．ただしここで，$d\Sigma$ は X によって誘導される Σ の体積要素であり，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準的な内積を表す．汎関数 $\mathcal{F}$ は非等方的表面エネルギーのモデルとして利用され，結晶学，冶金学，物理化学，その他さまざまな分野での応用がある．$V(X)$ は，超曲面 X と $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点が作る錐状領域の符号付き体積である．

以下，F に対する次の「凸性条件」を仮定する．すなわち，F の自然な拡張 $\tilde{F} : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$,

$$\tilde{F}(x) := |x| \cdot F(x/|x|) \quad (x \neq 0), \qquad \tilde{F}(0) := 0$$

が凸関数であることを仮定する．この条件は次の条件と同値である：F の S^n での勾配とヘシアンをそれぞれ DF, D^2F で表したとき，S^n の各点において，$D^2F + F1$ を表す行列が正定値である．ただしここで，1 は identity endomorphism field を表す．

$X_\epsilon = X + (\xi + \psi\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ を X のコンパクトな台を持つ変分とする．ただしここで，ξ は変分ベクトル場の接成分である．$\mathcal{F}$ と V の第 1 変分は次で与えられる．

$$\partial_\epsilon \mathcal{F}|_{\epsilon=0} := \left.\frac{\partial \mathcal{F}(X_\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -\int_\Sigma \Lambda\psi \, d\Sigma, \qquad \partial_\epsilon V|_{\epsilon=0} = \int_\Sigma \psi \, d\Sigma. \tag{2}$$

ただしここで

$$\Lambda := -\mathrm{div}_\Sigma DF + nHF = -\mathrm{trace}_\Sigma((D^2F + F1) \circ d\nu)$$

である．ここに，H は X の平均曲率であり，DF は，$\mathbf{R}^{n+1}$ での平行移動により，X に沿う接ベクトル場とみなしている．Λ を X の非等方的平均曲率 (anisotropic mean curvature) という (cf. [5], [1])．(2) より，X がコンパクトな台を持ち体積を保つ任意の変分に対する $\mathcal{F}$ の臨界点であることは，X の非等方的平均曲率が至る所一定であることと同値である．このような X を非等方的平均曲率一定超曲面 (CAMC 超曲面) という．

特に $F \equiv 1$ である場合は $\Lambda = nH$ である．この意味で，CAMC 超曲面の研究は，CMC 超曲面や極小超曲面の研究を含む．

凸性条件により，Euler-Lagrange 方程式 “Λ = constant” は楕円型となること，また，これにより，CAMC 超曲面に対しても，CMC 超曲面の場合と同様の最大値原理が成立することがわかる．これらの事実は，CAMC 超曲面の研究において重要である．

以下，第 2 節では，同じ体積を囲む閉超曲面のうちで $\mathcal{F}$ の最小値を与える超曲面 (Wulff 図形と呼ばれる) について解説し，非等方的平均曲率を Wulff 図形を用いて表す．第 3 節では，CAMC 曲面に対するある自由境界問題について考え，その安定解の存在と一意性，幾何学的性質等について述べる．この問題は，応用上の観点からも興味を持たれている．

2 Wulff 図形

汎関数 $\mathcal{F}$ について，次の結果が知られている．

定理 2.1 (J. E. Taylor [6]) $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の同じ $(n+1)$-次元体積 V をもつ「閉超曲面」の中で，$\mathcal{F}$ の最小解 $W(V)$ が (平行移動を除き) ただ一つ存在し，凸である．ただしここで,「閉超曲面」という言葉は，正の Lebesgue measure をもつ集合の境界という意味で使っている．

この定理には「凸性条件」の仮定は不要である．特に $F \equiv 1$ の場合は，最小解 $W(V)$ は標準球面 S^n である．一般に，$W(V)$ は次で定義される W と相似である．

$$W := \partial B_F,$$

$$B_F := \cap_{\nu \in S^n} \{Y \in \mathbf{R}^{n+1} \ ; \ \langle Y, \nu \rangle \le F(\nu)\}.$$

W (または B_F) を F (または $\mathcal{F}$) に対する Wulff 図形 (Wulff shape) という．W は

$$W = \left\{ Y \in \mathbf{R}^{n+1} \ ; \ \sup_{\nu \in S^n} \frac{\langle Y, \nu \rangle}{F(\nu)} = 1 \right\}$$

と表すこともできる．一般には W は滑らかとは限らないが，F が凸性条件を満たすときには滑らかであり，埋め込み

$$Y : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}, \qquad Y(\nu) := DF + F(\nu)\nu$$

の像である．Y の Gauss 写像は ν と一致し，$\langle Y, \nu \rangle = F$ である (すなわち，F は Y の支持関数と一致する) ことがわかる．$F \equiv 1$ の場合は，W は，半径が 1 で中心が原点である $\mathbf{R}^{n+1}$ の超球面である．

逆に，任意の滑らかな狭義凸閉超曲面 W を考えよう．ただし，原点は W によって囲まれる領域の内部にあるとする．W の支持関数を q とし (すなわち，$\nu \in S^n$ に対し，ν をその点における外向き法ベクトルにもつ W の点を $Y(\nu)$ とするとき，$q(\nu)$ は，W の $Y(\nu)$ における接超平面と原点との距離である)，$F(\nu) := q(\nu)$ とおく．このとき，W は，汎関数 $\mathcal{F}[X] = \int_\Sigma F(\nu)\, d\Sigma$ に対する Wulff 図形となる．

今，W を汎関数 $\mathcal{F}$ に対する Wulff 図形とする．はめ込み $X : \Sigma = \Sigma^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ を考える．X の Gauss 写像を $\nu : \Sigma \to S^n$ で表す．点 $p \in \Sigma$ に対し，W 上の点 $\bar{G}(p)$ であって，$\nu(p)$ が W の $\bar{G}(p)$ での外向き単位法ベクトルと一致するものが一意的に定まる．このようにして得られた写像 $\bar{G} : \Sigma \to W$ を X の非等方的 Gauss 写像という．

$$\Lambda = -\mathrm{trace}\, d\bar{G}$$

が成立する．

3　自由境界問題

次のような自由境界問題を考える．$\mathbf{R}^3$ 内の平行な二平面によって囲まれる閉領域 $\Omega := \{z_0 \le z \le z_1\}$ に埋め込まれたコンパクト曲面 X であって，その境界が支持曲面 $\Pi_0 \cup \Pi_1$ ($\Pi_i := \{z = z_i\}$) に含まれるもの全体を考える．(自由境界問題において，考察の対象となる曲面の境界が含まれているべき曲面を支持曲面という．したがって，あらかじめ与えられた支持曲面が，自由境界問題の境界条件を与える．) X のエネルギー $\mathcal{E}[X]$ を

$$\mathcal{E}[X] := \mathcal{F}[X] + \omega_0 \mathcal{A}_0[X] + \omega_1 \mathcal{A}_1[X] \tag{3}$$

によって定義する．ただしここで，$\mathcal{A}_i[X]$ は，X の境界が囲む Π_i の領域の面積であり，ω_i は定数である．$\omega_i \mathcal{A}_i[X]$ は濡れエネルギーと呼ばれる．物理的モデルにおいては，ω_i は Π_i と X に対応する物質によって決まる定数である．

$X(\Sigma) \cup \Pi_0 \cup \Pi_1$ が囲む体積 V を保つ X の変分に対する $\mathcal{E}$ の臨界点を capillary surface と呼ぶことにする．曲面 X に対する臨界条件 (Euler-Lagrange 方程式) は,「X が CAMC であり，かつ，X の境界における Π_i との接触角が境界の各連結成分上一定」であることがわかる．capillary surface X が，Π_0, Π_1 の両方に空でない境界成分をもつとき,「X は Π_0, Π_1 を張る」と言うことにする．capillary surface X は，体積を保ち，境界条件を満たす X の任意の変分に対して $\mathcal{E}$ の第 2 変分が非負であるとき，安定であると定義する．

今，我々は，初期条件 $\mathcal{F}, V, z_1 - z_0$, ω_0, ω_1 に対して，安定な capillary surface の存在と一意性を問題とする．

支持曲面がただ 1 つの平面である場合に対するエネルギー最小解については，次の一意性定理が知られていた．

定理 3.1 (W. L. Winterbottom [7], cf. [3]) Wulff 図形 (の相似) の部分集合で Π_0 (または Π_1) 上に自由境界をもつものは，Π_0 (または Π_1) 上に自由境界をもつ曲面の中で,「体積一定」のもとでの (平行移動を除き) 一意的なエネルギー最小解を与える．

我々は，さらに，次の一意性定理を得た．

定理 3.2 (Wulff 図形のエネルギー最小性 [3]) Wulff 図形 (の相似) の Π_0, Π_1 を張る部分は，$\Pi_0 \cup \Pi_1$ 上に自由境界をもつ曲面の中で,「体積一定」のもとでの (平行移動を除き) 一意的なエネルギー最小解を与える．

ところが，Wulff 図形の部分集合を考えるだけでは，任意の初期条件 $\mathcal{F}$, V, $z_1 - z_0$, ω_0, ω_1 に対する capillary surface は得られない．そこで我々は，すべての CAMC 曲面について考察する．

以下では，W に対する (したがって $\mathcal{F}$ に対する) 次の条件を仮定する．

(W1) W は滑らかな凸閉曲面であって，z 軸に関して回転対称である．
(W2) W は 平面 $z = 0$ に関して対称である．
(W3) W の母線の曲率 (> 0) は，$\{z \geq 0\}$ において，z に関して単調非減少である．

これらの条件は，次のように言い換えることができる．

(W1) F は「凸性」条件を満たし，1 変数関数 $F = F(\nu_3)$ である．
(W2) $F = F(\nu_3)$ は偶関数である．
(W3) $\mu_1(\nu_3) := ((1-\nu_3^2)F'' - \nu_3 F' + F)^{-1}$ は，$0 \leq \nu_3 \leq 1$ において単調非減少である．

このとき，最大値原理と Alexandrov 鏡映法により，capillary surface は z 軸に関して回転対称であることが示せる．

以下では $\omega_0 = \omega_1 =: \omega$ と仮定する．

$\omega \geq 0$ の場合には，安定な capillary surface の幾何学的な特徴付け，存在と一意性に関する結果が得られた．

定理 3.3 (安定解の特徴付け [2], [3]) (i) $\omega = 0$ のとき，安定な capillary surface は，十分短い円柱と Wulff 図形の上または下半分に相似な曲面である．

(ii) $\omega > 0$ のとき，安定な capillary surface は，水平面に関して対称で Gauss 曲率正である．

注意 3.1 X が円柱のとき，X が安定なのは，

$$\frac{\mu_1(0)|\Lambda|}{R} \leq (\pi/h)^2 \tag{4}$$

が成り立つときかつそのときに限る．ただしここで R，h はそれぞれ X の半径と高さである．

Wulff 図形 W の点の z 座標の最大値を $\bar{\omega}$ で表す．

定理 3.4 (安定解の存在と一意性 [4]) $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}$ と仮定する．ある定数 $V_0 := V_0(h, \omega) > 0$ が存在して次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) $V < V_0$ ならば，体積 V，高さ h の安定な capillary surface が (平行移動を除き) 一意的に存在し，それは，W の部分集合に相似である．

(ii) $V_0 \leq V$ ならば，体積 V，高さ h の安定な capillary surface であって Π_0, Π_1 を張るものが (平行移動を除き) 一意的に存在する．

注意 3.2 上の定理において，capillary surface の境界成分の個数は，(i) では 1 であり，(ii) では 2 である．

注意 3.3 上の定理の V_0 については，単なる存在定理があるだけでなく，幾何学的に与えられる定数である．ここでは，スペースの関係でその詳細は省略する．

注意 3.4 $\omega > \bar{\omega}$ の場合は，解は存在しない．

注意 3.5 $\omega < 0$ である場合には，安定な capillary surface の幾何学的な特徴付け，一意性の問題は，CMC 曲面の場合ですら未解決である．

注意 3.6 定理 3.3, 3.4 は，CMC 曲面に対しては，Athanassenas (1987), Vogel(1987, 1989), Finn-Vogel (1992), Zhou (1993, 1995) によって証明されている．詳しくは，[4] を参照されたい．

定理 3.5 (葉層 [4]) $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}$ と仮定する．$V \geq V_0$ に対し，定理 3.4 で与えられた一意解を $\Sigma(V) = \Sigma(V, h, \omega)$ とおく．このとき，曲面族 $\{\Sigma(V) \mid V > V_0\}$ は，$\mathbf{R}^3$ の閉領域 $\{z_0 \leq z \leq z_1\}$ の，曲面 $\Sigma(V_0)$ の外側の領域の葉層を与える．

References

[1] M. Koiso and B. Palmer. Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature. *Indiana University Mathematics Journal* **54** (2005), 1817–1852.

[2] M. Koiso and B. Palmer. Stability of anisotropic capillary surfaces between two parallel planes. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **25** (2006), 275–298.

[3] M. Koiso and B. Palmer. Anisotropic capillary surfaces with wetting energy. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **29** (2007), 295–345.

[4] M. Koiso and B. Palmer. Uniqueness theorems for stable anisotropic capillary surfaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **39** (2007), 721–741.

[5] R. C. Reilly. The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces. *Duke Math. J.* **43** (1976), 705–721.

[6] J. E. Taylor. Crystalline variational problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 568–588.

[7] W. L. Winterbottom. Equilibrium shape of a small particle in contact with a foreign substrate. *Acta Metallurgica* **15** (1967), 303–310.

[8] G. Wulff. Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachsthums und der Auflösung der Krystallflächen. *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie* **34** (1901), 449–530.