コンパクト 4-対称空間の対合について

栗原 博之 (埼玉短期大学)

G を Lie 群, H をその閉部分群とする. G の位数 k の自己同型写像 σ が存在して次を満たすとき, $(G/H, \sigma)$ を Riemann k-**対称空間**と呼ぶ.

1. $G_o^\sigma \subset H \subset G^\sigma$, ここで G^σ は σ の固定点全体, G_o^σ はその単位元を含む連結成分を表す.
2. σ によって誘導された G/H の変換群は等長的.

今, G をコンパクトとする. G の対合 τ で, H を保つものに注目する. $k=2$ のときは $(G/H, \sigma)$ はコンパクト対称空間であり, τ と σ は可換な対合となる. このとき τ を分類することは本質的にアフィン対称空間を分類することになる (Berger [Be]). コンパクト 3-対称空間においてはこのような τ を分類することは, アフィン 3-対称空間 ($\tau\sigma = \sigma\tau$) および半分次元全実全測地的部分多様体 ($\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$) の分類と等価であることも知られている. (東條 [T1],[T2]) また対称空間においては, 対称部分多様体の分類にもこれらの対合は重要である. (塚田, 内藤 [TN])

これらのことから H を保つ G の対合を分類することは重要な問題である. 今回, 内部型のコンパクト Riemann 4-対称空間 $(G/H, \sigma)$ に対して, このような対合を分類することを考える (コンパクト Riemann 4-対称空間は Jeménez によって分類されている [J]).

$\mathfrak{g}$ をコンパクト単純 Lie 環とし $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環とする. $\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$ の複素化とし, $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ を $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ に関する $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のルート系とする. $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ に関するルート系の 1 つの基本ルート系とする. $K_j \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}(j = 1, \ldots, n)$ を

$$\alpha_i(K_j) = \delta_{ij}, (i, j = 1, \ldots, n)$$

によって定義し，最高ルート $-\alpha_0$ を

$$-\alpha_0 = \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j, (m_j \in \mathbb{Z})$$

で表す．簡単のため $\sqrt{-1}h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\tau_h := \mathrm{Ad}(\exp(\pi\sqrt{-1}h))$$

とおく. このとき次が知られている.

補題 1. ([Jiménes [J]]) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が対称対にも 3-対称対にも同型でないとすると σ は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の下である $\tau_{(1/2)h_a}$ $(a=0,1,2,3)$ に共役である．ここで h_a は次のどれかとなる．

$$
\begin{array}{ll}
h_0 = K_i, & m_i = 4, \\
h_1 = K_i \text{ or } K_j + K_k & m_i = 3, m_j = m_k = 2 \\
h_2 = K_i + K_j, & m_i = 1, m_j = 2, \\
h_3 = K_i + K_j + K_k, & m_i = m_j = m_k = 1.
\end{array}
$$

注意 2. $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{h}$ の中心とする．$\sigma = \tau_{(1/2)h_a}$ $(a=0,1,2,3)$ なら，$\mathfrak{z}$ の次元は a に等しい．

今, $(G/H, \sigma)$ を 4-対称空間とし $\dim \mathfrak{z} = 0$ または 1 であると仮定する。このとき補題 1 から $\sigma = \tau_{(1/2)K_i}(m_i = 3$ または $4)$ または $\tau_{(1/2)(K_j+K_k)}(m_j = m_k = 2)$ である．このとき $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ を満たす対合 τ は

$$
\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma \quad \text{または} \quad \sigma^{-1}
$$

であることがわかる．

注意 3. $\sigma = \tau_{(1/2)h_2}$，$\tau_{(1/2)h_3}$ の時は成り立たない．

$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をそれぞれ G, H の Lie 環とし, $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ となるようにとる．このとき $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ に関するルート系の 1 つの基本ルート系 $\Pi(\mathfrak{h})$ として次が取れる．

$$
\Pi(\mathfrak{h}) = \begin{cases}
\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \setminus \{\alpha_i\} & (\sigma = \tau_{(1/2)K_i}, m_i = 3 \text{ のとき}) \\
\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \cup \{\alpha_0\} \setminus \{\alpha_i\} & (\sigma = \tau_{(1/2)K_i}, m_i = 4 \text{ のとき}) \\
\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \cup \{\alpha_0\} \setminus \{\alpha_i\} \cup \{\alpha_j\} & (\sigma = \tau_{(1/2)(K_i+K_j)} \text{のとき})
\end{cases}
$$

ここで分類の Key になる補題を 2 つ挙げる．

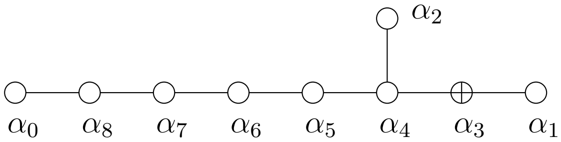
補題 4. τ を $\mathfrak{h}$ を保つ $\mathfrak{g}$ の対合とする．このとき $\mu\tau\mu^{-1}(\Pi(\mathfrak{h})) = \Pi(\mathfrak{h})$ を満たす $\mu \in \mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ が存在する．

$\mathfrak{g}^*$ を非コンパクト単純 Lie 環, θ を $\mathfrak{g}^*$ の Cartan 対合とする．θ を grade-reversing Cartan 対合とする第 ν 種 ($\nu = 3$ または 4) の gradation $\mathfrak{g}^* = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \mathfrak{g}_k^*$ を任意にとる．Z をこの gradation の特性元とする．

補題 5. 任意の $\mathfrak{g}^*, \theta, Z$ の組 $(\mathfrak{g}^*, \theta, Z)$ に対して $\sigma = \tau_{(1/2)Z}$ とおき, τ を $\mathfrak{g}^*$ のコンパクト双対 $\mathfrak{g}$ 上の θ から誘導される対合とすると, σ は $\mathfrak{g}$ の位数 4 の自己同型であり, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ が成り立つ．

補題 4 から補題 5 の中の τ を, $\mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ の元を用いて $\Pi(\mathfrak{h})$ を保つ対合に移すことが出来る．この移された対合を τ^{Π} で表す．補題 4 と τ^{Π} を用いて $\mathfrak{h}$ を保つ対合の全ての可能性を挙げることが出来る．

例. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8,\ \sigma = \tau_{(1/2)K_3}$ のとき.
$\Pi(\mathfrak{h})$ の Dynkin 図形は以下のようになる.



(ここで α_3 は除く)

補題 4 から τ の $\mathfrak{t}$ への制限 $\tau|_{\mathfrak{t}}$ は以下のどちらかになるとしてよい.
(i) $\tau|_{\mathfrak{t}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{t}}$
(ii) $\tau|_{\mathfrak{t}}(\alpha_2) = \alpha_0,\ \tau|_{\mathfrak{t}}(\alpha_4) = \alpha_8,\ \tau|_{\mathfrak{t}}(\alpha_5) = \alpha_7,\ \tau|_{\mathfrak{t}}(\alpha_j) = \alpha_j,\ j = 1, 6$
(i) を満たす τ は $\tau\sigma = \sigma\tau$ で $\tau = \tau_K(\sqrt{-1}K \in \mathfrak{t})$ と表せる.
(ii) を満たす τ は $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ が成り立つことが分かる. $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{e}_{8(8)},\ Z = K_3$ のときの τ^{Π} を τ_1^{Π} とすると (ii) を満たす. (ii) を満たす任意の対合 τ に対して $\tau|_{\mathfrak{t}} = \tau_1^{\Pi}|_{\mathfrak{t}}$ だから

$$\tau = \tau_1^{\Pi}\tau_K \quad (\sqrt{-1}K \in \mathfrak{t})$$

と表すことが出来る.

この例のようにして τ の可能性を全て挙げることが出来る.
それらを $\mathfrak{h}$ を保つ $\mathfrak{g}$ の自己同型写像全体 ($\mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ で表す) の下で分類をしたい. $(G/H, \sigma)$ を G がコンパクトかつ単純なリーマン 4-対称空間で, σ が $\tau_{(1/2)K_i}$ ($m_i = 3$ または 4) に共役であるときは, $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ の共役を調べることにより, $\mathfrak{h}$ を保つ $\mathfrak{g}$ の対合 τ を分類できる. (分類表は, 栗原, 東條 [KT] 参照)

例として $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$, $\dim \mathfrak{z} = 0$ の表を挙げておく. (E_α はワイル基底を表す)

表 1: $\dim \mathfrak{z} = 0,\ \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau,\ \sigma = \tau_{(1/2)K}$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, K)$	τ	$\mathfrak{g}^\tau$	$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^\tau$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{su}(8) \oplus \mathfrak{su}(2), K_3)$	τ_1^{Π}	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	$\tau_1^{\Pi}\tau_{H_6}$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{sp}(4) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	$\tau_1^{\Pi}\tau_{H_6+(1/2)H_3}$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{sp}(4) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(6), K_6)$	τ_2^{Π}	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(5) + \mathfrak{so}(5)) \oplus (\mathfrak{so}(3) + \mathfrak{so}(3))$
	$\tau_2^{\Pi}\tau_{H_1+H_8}$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(7) + \mathfrak{so}(3)) \oplus \mathfrak{so}(5)$
	$\tau_2^{\Pi}\tau_{H_1+H_3+H_4}$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(9) \oplus (\mathfrak{so}(3) + \mathfrak{so}(3))$
	$\tau_2^{\Pi}\tau_{H_1+H_3+H_8}$	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(7) + \mathfrak{so}(3)) \oplus \mathfrak{so}(5)$

τ_1^{Π} : $E_{\alpha_1} \mapsto -E_{\alpha_1},\ E_{\alpha_2} \mapsto E_{\alpha_0},\ E_{\alpha_3} \mapsto c_1E_{\beta_1},\ E_{\alpha_4} \mapsto E_{\alpha_8},\ E_{\alpha_5} \mapsto E_{\alpha_7},\ E_{\alpha_6} \mapsto -E_{\alpha_6},$
$(\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7)$

τ_2^{Π} : $E_{\alpha_1} \mapsto -E_{\alpha_1},\ E_{\alpha_2} \mapsto E_{\alpha_5},\ E_{\alpha_3} \mapsto -E_{\alpha_3},\ E_{\alpha_4} \mapsto -E_{\alpha_4},\ E_{\alpha_6} \mapsto c_2E_{\beta_2},\ E_{\alpha_7} \mapsto E_{\alpha_0},$
$E_{\alpha_8} \mapsto -E_{\alpha_8}$, $(\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8)$

where $c_i (i = 1, 2)$ is some complex number with $|c_i| = 1$.

表 2: $\dim \mathfrak{z} = 0,\ \tau\sigma = \sigma\tau,\ \tau = \tau_h, \sigma = \tau_{(1/2)K}$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, K)$	h	$\mathfrak{g}^\tau$	$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^\tau$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{su}(8) \oplus \mathfrak{su}(2), K_3)$	H_1	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{su}(8) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	H_3	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(8) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	H_4	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{sp}(4) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	H_6	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4) + \mathfrak{u}(4)) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	$H_3 + H_4$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{sp}(4) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	$H_3 + H_6$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4) + \mathfrak{u}(4)) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	$H_1 + H_4$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(6) + \mathfrak{u}(2)) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	$H_1 + H_6$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(6) + \mathfrak{u}(2)) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(6), K_6)$	H_1	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(8) + \mathfrak{so}(2)) \oplus \mathfrak{so}(6)$
	H_3	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(6) + \mathfrak{so}(4)) \oplus \mathfrak{so}(6)$
	H_6	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(6)$
	H_8	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(10) \oplus (\mathfrak{so}(4) + \mathfrak{so}(2))$
	$H_1 + H_8$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(8) + \mathfrak{so}(2)) \oplus (\mathfrak{so}(4) + \mathfrak{so}(2))$
	$H_2 + H_7$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{u}(3) \oplus \mathfrak{u}(5)$
	$H_3 + H_8$	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(6) + \mathfrak{so}(4)) \oplus (\mathfrak{so}(4) + \mathfrak{so}(2))$
	$H_2 + H_6 + H_7$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{u}(3) \oplus \mathfrak{u}(5)$

参考文献

[Be] M. Berger, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **74** (1957) 85–117.

[KT] H. Kurihara and K. Tojo, *Involutions of compact 4-symmetric spaces*, to appear in Osaka J. Math., math.DG/0702869

[J] J. A. Jiménez, *Riemannian 4-symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **306** (1988), 715–734.

[T1] K. Tojo, *Totally real totally geodesic submanifolds of compact* 3*-symmetric spaces,* Tohoku Math. J., **53** (2001), 131–143.

[T2] K. Tojo, *Classification of totally real totally geodesic submanifolds of compact* 3*-symmetric spaces,* J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 17–53.

[TN] 塚田和美, 内藤博夫, **対称空間の対称部分多様体の分類**, 数学, **55(3)** (2003), 42–57, 日本数学会編集, 岩波書店