球面内のクリフォード極小超曲面の特徴付け

前田 定廣 (佐賀大学理工学部)

球面内の (全測地的ではないが) 全せい的な超曲面に対する特徴付けは数多くあるが, 本講演では "超曲面上の測地線" を観察してみよう。次の事は容易に示せる。

Fact. $M^n \hookrightarrow S^{n+1}(c)$ が等長はめ込みで, しかも M^n 上の $\underline{\text{任意の}}$ 測地線は $S^{n+1}(c)$ 上の小円に写る。$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow} M^n \underset{local}{=} S^n(c_1) \underset{\text{全せい的}}{\hookrightarrow} S^{n+1}(c),\ c_1 > c,$ よって, 全測地的ではない。

そこで, 前述の statement における測地線の本数を減らしてみよう。超曲面 M^n 上の点の数は減らせないが, 次が示せる。

命題. 等長はめ込み $M^n \hookrightarrow S^{n+1}(c)$ に対して, 次が成り立つ。
$\forall x \in M^n$ において次の 2 条件を満たす（T_xM^n の）正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が存在する。

(1) 初期条件: $\gamma_i(0) = x,\ \dot{\gamma}_i(0) = v_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ を満たす M^n 上の測地線 $\gamma_i = \gamma_i(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の小円。
(2) 初期条件: $\gamma_{ij}(0) = x,\ \dot{\gamma}_{ij}(0) = (v_i + v_j)/\sqrt{2}\ (1 \leqq i < j \leqq n)$ を満たす M^n 上の測地線 $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の小円。

$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow} M^n \underset{local}{=} S^n(c_1) \underset{\text{全せい的}}{\hookrightarrow} S^{n+1}(c),\ c_1 > c,$ よって, 全測地的ではない。

命題の条件（２）を取ると次が成り立つ。

定理 1. 等長はめ込み $\underset{\text{連結}}{M^n} \hookrightarrow S^{n+1}(c)$ に対して次が成り立つ。
$\forall x \in M^n$ において次の条件を満たす（T_xM^n の）正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が存在する。
初期条件: $\gamma_i(0) = x,\ \dot{\gamma}_i(0) = v_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ を満たす M^n 上の測地線 $\gamma_i = \gamma_i(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の小円。
$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow} M^n$ は $S^{n+1}(c)$ 内の $\underline{\text{零主曲率を持たない}}$ 等径超曲面。

証明については, M. Kimura and S. Maeda: Canad. Math. Bull. 43 (2000), 74-78 を参照されたい。

そこで, 主曲率 2 個を持つ等径超曲面であるクリフォード超曲面を考える。

$$M_{r,n-r}(c_1, c_2) := S^r(c_1) \times S^{n-r}(c_2) \hookrightarrow S^{n+1}(c),$$

ここで $(1/c_1) + (1/c_2) = 1/c,\ 1 \leqq r \leqq n-1$ であり, クリフォード超曲面 $M_{r,n-r}(c_1, c_2)$ は, 2 つの異なる主曲率 $c_1/\sqrt{c_1+c_2}$ (重複度 r), $-c_2/\sqrt{c_1+c_2}$ (重複度 $n-r$) を持つ。しかも球面内の超曲面で型作用素 A が平行（即ち, 第二基本形式が平行）になるものは, 全せい超曲面かクリフォード超曲面であることが, よく知られている。

定理 1 の系としてクリフォード超曲面を特徴付ける次の定理が得られる。

定理 2. 等長はめ込み $\underset{\text{連結}}{M^n} \hookrightarrow S^{n+1}(c)$ に対して次が成り立つ。

$$M^n \underset{local}{=} M_{r,n-r}(c_1,c_2), 1 \leqq r \leqq n-1, (1/c_1)+(1/c_2)=1/c.$$

$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in M^n$ において次の２条件を満たす（T_xM^n の）正規直交基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ が存在する。

(1) 初期条件: $\gamma_i(0)=x,\ \dot\gamma_i(0)=v_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ を満たす M^n 上の測地線 $\gamma_i=\gamma_i(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の <u>小円</u>。

(2) $^\exists d: M \to \mathbb{N},\ 0 <^\exists \alpha(:\text{定数}) < 1$ に対して, 初期条件: $\gamma_{ij}(0)=x, \dot\gamma_{ij}(0)=\alpha v_i + \sqrt{1-\alpha^2}\, v_j\ (1 \leqq i \leqq d_x < j \leqq n)$ を満たす M^n 上の測地線 $\gamma_{ij}=\gamma_{ij}(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の <u>大円</u>。

このとき, $d \equiv r$ となり $M = M_{r,n-r}(c/\alpha^2, c/(1-\alpha^2))$.

定理２は T. Adachi and S. Maeda: Colloquium Math. 105 (2006), 143-148 に掲載された結果であるが, 証明は容易である。まず, 条件 (1) から超曲面 M^n は等径的 (即ち, M^n の $S^{n+1}(c)$ における主曲率はすべてそれぞれ一定) だということが分かる。次に条件 (2) を使うと異なる主曲率の個数は２個という事になり, 超曲面 M^n は $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$ と合同になる。

そこで, 任意のクリフォード超曲面がこの条件 (2) を満たすことをここで確かめる。そのために $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$ 上の測地線 $\gamma=\gamma(s)$ で, $S^{n+1}(c)$ 上の大円になるものを見つけよう。∇, $\widetilde\nabla$ をそれぞれ $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$, $S^{n+1}(c)$ のリーマン接続, A を $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$ の $S^{n+1}(c)$ における型作用素, $\mathcal{N}$ を単位法ベクトル場とすると次が成り立つ。

$$\widetilde\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + \langle A\dot\gamma, \dot\gamma\rangle\mathcal{N} = \langle A\dot\gamma, \dot\gamma\rangle\mathcal{N}.$$

一方,

$$\nabla_{\dot\gamma}\langle A\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = \langle(\nabla_{\dot\gamma}A)\dot\gamma, \dot\gamma\rangle + 2\langle A\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = 0.$$

よって $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$ 上の測地線 $\gamma=\gamma(s)$ で, $S^{n+1}(c)$ 上の大円になるものが存在するための必要十分条件は, $\langle A\dot\gamma(0), \dot\gamma(0)\rangle = 0$ が成り立つことである。そこで, $\dot\gamma(0) = (\cos t)u + (\sin t)v$ とおく。ただし, $Au = \Bigl(c_1/\sqrt{c_1+c_2}\Bigr)u$, $Av = \Bigl(-c_2/\sqrt{c_1+c_2}\Bigr)v$, $\|u\|=\|v\|=1$ とする。故に $\langle A\dot\gamma(0), \dot\gamma(0)\rangle = 0$ より

$$\cos^2 t \cdot \frac{c_1}{\sqrt{c_1+c_2}} - \sin^2 t \cdot \frac{c_2}{\sqrt{c_1+c_2}} = 0.$$

よって, $\tan t = \sqrt{c_1/c_2}\ (0 < t < \pi/2)$ を得る。従って,

$\dot\gamma(0) = \sqrt{\dfrac{c_2}{c_1+c_2}}\, u + \sqrt{\dfrac{c_1}{c_1+c_2}}\, v$ とすれば, $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$ 上の測地線 $\gamma=\gamma(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の大円になることが分かる。

次に, この超曲面 $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$ が $S^{n+1}(c)$ において, 特に極小としよう。$\mathrm{Tr}\, A = 0$ より $rc_1-(n-r)c_2=0$. 一方, $1/c_1+1/c_2=1/c$ であるから, $c_1=\dfrac{nc}{r}$, $c_2=\dfrac{nc}{n-r}$ を得るから $\sqrt{\dfrac{c_2}{c_1+c_2}} = \sqrt{\dfrac{r}{n}}$, $\sqrt{\dfrac{c_1}{c_1+c_2}} = \sqrt{\dfrac{n-r}{n}}$ となる。従って, $M_{r,n-r}(c_1,c_2)$ が $S^{n+1}(c)$ において極小であるための必要十分条件は, $\dot\gamma(0) = \sqrt{\dfrac{r}{n}}\, u + \sqrt{\dfrac{n-r}{n}}\, v$ となる $M_{r,n-r}$ 上の測地線 $\gamma=\gamma(s)$ が $S^{n+1}(c)$ 上の大円になることである。

よって, 定理２の系としてクリフォード $\underline{\text{極小}}$ 超曲面を特徴付ける次の定理が得られる。

定理 3. 等長はめ込み $\underset{\text{連結}}{M^n} \hookrightarrow S^{n+1}(c)$ に対して次が成り立つ。

M^n: クリフォード $\underline{\text{極小}}$ 超曲面, 即ち

$$M^n \underset{local}{=} M_{r,n-r}(nc/r, nc/(n-r)), 1 \leqq r \leqq n-1.$$

$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow}$ 適当な整数 r $(1 \leqq r \leqq n-1)$ と $\forall x \in M^n$ において次の２条件を満たす（T_xM^n の）正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が存在する。

(1) 初期条件: $\gamma_i(0) = x$, $\dot{\gamma}_i(0) = v_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を満たす M^n 上の測地線 $\gamma_i = \gamma_i(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の $\underline{\text{小円}}$。

(2) ${}^\exists d : M \to \mathbb{N}$ に対して, 初期条件: $\gamma_{ij}(0) = x, \dot{\gamma}_{ij}(0) = \sqrt{r/n}\, v_i + (\sqrt{(n-r)/n}\,) v_j$ $(1 \leqq i \leqq d_x < j \leqq n)$ を満たす M^n 上の測地線 $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(s)$ は $S^{n+1}(c)$ 上の $\underline{\text{大円}}$。

このとき, $d \equiv r$ となる。

注意 1.

1) 定理１, ２, ３において, M^n: 完備とするとそれらは皆大域的な結果になる。
2) 定理２, ３の条件 (2) は M^n 上の各点で成り立つ必要はない。ある一点で成り立てばよい。

参考. $\underline{\text{すべての}}$ クリフォード $\underline{\text{極小}}$ 超曲面を特徴付けているその他のよく知られた定理を紹介する。

定理 A. $M^n \underset{\text{極小}}{\hookrightarrow} S^{n+1}(c)$, $\rho \equiv n(n-2)c$ (ここで, $\rho : M^n$ のスカラー曲率) $\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow}$ $M^n \underset{\text{local}}{=} M_{r,n-r}(nc/r, nc/(n-r)), 1 \leqq r \leqq n-1.$

S.S. Chern, M.P. doCarmo and S. Kobayashi: Functional analysis and related fields, Springer (1970), 59-75 または, H.B. Lawson: Ann. Math. 89 (1969), 187-197 を参照されたい。

定理 B. $\underset{\text{コンパクト}}{M^n} \underset{\text{極小}}{\hookrightarrow} S^{n+1}(c)$, $K \geqq 0$ (ここで, $K : M^n$ の断面曲率)

$$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow} M^n = \begin{cases} S^n(c) & (\text{: 全測地的}) \\ M_{r,n-r}(nc/r, nc/(n-r)), & 1 \leqq r \leqq n-1. \end{cases}$$

K. Nomizu and B. Smyth: J. Diff. Geom. 3 (1969), 367-377 を参照。なお, 定理 B の仮定で, “コンパクト” を “スカラー曲率が一定” に置き換えると対応する局所定理が得られる。

定理 C. $M^n \underset{\text{極小}}{\hookrightarrow} S^{n+1}(c)$, $\nabla S = 0$ (ここで, $S : M^n$ のリッチテンソル)

$$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow} M^n \underset{\text{local}}{=} \begin{cases} S^n(c) & (\text{: 全測地的}) \\ M_{r,n-r}(nc/r, nc/(n-r)), & 1 \leqq r \leqq n-1. \end{cases}$$

H.B. Lawson: Ann. Math. 89(1969), 187-197 を参照。次の結果は, すべての クリフォード極小超曲面を特徴付けている訳ではないが, 有名な定理である。

定理 D. $M^n \underset{\text{極小}}{\hookrightarrow} S^{n+1}(c)$, 主曲率が 2 個でそれぞれの重複度が, $r(\geqq 2)$, $n-r(\geqq 2)$.
$\underset{\text{必・十}}{\Longleftrightarrow}$ $M^n \underset{\text{local}}{=} M_{r,n-r}(nc/r, nc/(n-r))$, $2 \leqq r \leqq n-2$.

主曲率が 2 個でも片方の重複度が 1 の場合は, 様相が一変する。

定理 E. $M^n \underset{\text{極小}}{\hookrightarrow} S^{n+1}(c)$, $n \geqq 3$, 2 個の主曲率 λ (重複度 $n-1$), $-(n-1)\lambda$ (重複度 1) を持つ。$\Longrightarrow$ $M \underset{\text{local}}{=}$ 平面曲線に沿って動く S^{n-1} の平行族。

定理 F. 定理 E の仮定を満たすコンパクトな極小超曲面が可算無限個存在する。その中で埋め込まれているものは $M_{1,n-1}(nc, nc/(n-1))$ のみである。

定理 D, E, F に関して, T. Otsuki: Amer. J. Math. 92 (1970), 145-173; Proc. Symp. Pure. Math. 27 (1975), 327-337 を参照されたい。

注意 2. 定理 F の極小超曲面の中で等径超曲面は, $M_{1,n-1}(nc, nc/(n-1))$ のみである。それ以外の（等径的でない）極小超曲面を 大槻多様体 と呼ぶ。

E-mail address: smaeda@ms.saga-u.ac.jp