複素空間型内の実超曲面の
構造ベクトル場の主曲率性について

永井　節夫*

富山大学理学部

（奇　宇恒氏, 高木亮一氏との共同研究）

0　はじめに

本講演では, 正則断面曲率一定 c の n 次元非平坦複素空間型 $M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の実超曲面 M について述べる. 特に M 上に自然に定義される構造ベクトル場の主曲率性に関する奇宇恒氏, 高木亮一氏との一連の共同研究による結果と, $\mathbb{C}P_n$ 内の極小実超曲面のスカラー曲率による挟撃問題の筆者による結果について論述する. 以下において $\mathbb{C}P_n$ は複素射影空間, $\mathbb{C}H_n$ は複素双曲空間を表す. J, g を $M_n(c)$ の複素構造及びケーラー計量とし, M のリーマン計量も同じ記号 g で表す. ν を M 上の局所法ベクトル場, A を形作用素とする. M 上 $\xi = -J\nu$ で定義されるベクトル場を M の構造ベクトル場とよぶ.

M 上には次で定義される almost contact metric structure (ϕ, ξ, η, g) が入る:

$$\phi X = (JX)^T,\ \xi = -J\nu,\ \eta(X) = g(X, \xi),\ X \in TM,$$

ここに $(\ )^T$ は接方向を表す.

1　構造ベクトル場の主曲率性

実超曲面の幾何学においては構造ベクトル場の主曲率性が重要な意味をもつ. Cecil と Ryan の結果 [1] によれば, 構造ベクトル場が主曲率ベクトルで, 対応する主曲率が $\sqrt{c}\cot\sqrt{c}r$ であり, さらに focal map ϕ_r が階数一定であれば, 実超曲面は複素空間型内のある Kähler 部分多様体上の tube であることが分かる. 特に複素射影空間 $\mathbb{C}P_n$ 内の等質実超曲面においては構造ベクトル場は全て主方向である. また, それらは 5 つのタイプ (A)–(E) 型に分類されている (cf. [11]). これについては次の様な結果が知られている.

*e-mail: snagai@sci.u-toyama.ac.jp

定理 1 (M. Okumura 1975 [8]) 複素射影空間 $\mathbb{C}P_n$ 内の実超曲面 M の形作用素 A が次の等式を満たすならば, 構造ベクトル場 ξ は主曲率ベクトルであり M は (A_1) 型または (A_2) 型の実超曲面と局所合同である.

$$\phi A = A\phi.$$

定理 2 (Y. Maeda 1976 [7]) 複素射影空間 $\mathbb{C}P_n$ 内の実超曲面 M の構造ベクトル場 ξ が主曲率ベクトルならば, その主曲率 α は局所定数である.

定理 3 (Y. Maeda 1976 [7]) 複素射影空間 $\mathbb{C}P_n$ 内の実超曲面 M の形作用素 A が微分方程式

$$(\nabla_X A)Y = -\frac{c}{4}\{\eta(Y)\phi X + g(\phi X, Y)\xi\}$$

を満たすならば, 構造ベクトル場 ξ は主曲率ベクトルであり, M は (A_1) 型または (A_2) 型の実超曲面と局所合同である.

定理 4 (T. Gotoh 1994 [3]) 複素射影空間 $\mathbb{C}P_n$ $(n \geq 3)$ 内の実超曲面 M でその形作用素 A が次の等式を満たすならば, 構造ベクトル場 ξ は主曲率ベクトルであり, M は測地球に局所合同である.

$$(R(X,Y)A)Z = 0, \quad X,\ Y,\ Z \perp \xi.$$

構造ヤコビ作用素 R_ξ $(R_\xi X = R(X,\xi)\xi)$ との関係について, 我々は最近次の結果を証明した:

定理 5 (U-H. Ki, S. Nagai and R. Takagi) 複素空間型 $M_n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の実超曲面が, $R_\xi\phi = \phi R_\xi$, $R_\xi S = SR_\xi$ を満たすならば, 構造ベクトル場 ξ は主曲率ベクトルであり, M は (A_0) 型, (A_1) 型, (A_2) 型の実超曲面または ξ に対応する主曲率 $\alpha = 0$ である実超曲面に合同である.

2 挟撃問題

部分多様体における曲率の挟撃問題とは, 種々の曲率 (断面曲率, リッチ曲率, スカラー曲率) に制限を付けた時の部分多様体の分類に関する問題を指す. 球面内のコンパクト極小部分多様体の場合には, 全測地的部分多様体のスカラー曲率は孤立している事を示した次の Simons による結果 ([10]) が有名である.

定理 6 (Simons [10]) M を断面曲率 $c > 0$ の $(n+p)$ 次元実空間型 $S^{n+p}(c)$ 内の n 次元コンパクト極小部分多様体とする. M のスカラー曲率 ρ が次の不等式をみたすとする.

$$\rho > n(n-1)c - \frac{nc}{(2-\frac{1}{p})}.$$

そのとき, $\rho = n(n-1)c$ で M は全測地的である.

複素射影空間内の実超曲面については Lowson による次の結果が有名である.

定理 7 (Lowson [5]) M を $\mathbb{C}P_n(c)$ 内のコンパクト極小実超曲面とする. M のスカラー曲率 ρ が次の不等式をみたすとする.

$$\rho \geq \frac{c}{2}(2n^2 - n - 1).$$

そのとき, $\rho = \frac{c}{2}(2n^2 - n - 1)$ で M は (A) 型の等質実超曲面である.

Lowson はホップ・ファイブレーションと球面内のコンパクト極小部分多様体に関する Chern, do Carmo, 小林の結果 [2] を用いて上の定理を導いた. 一方 $\mathbb{C}P_n(c)$ 内の部分多様体についての Simons type の式から直接証明する方法もある. $h = \mathrm{Tr}\, A$ を M の平均曲率, $h_{(2)} = \mathrm{Tr}\, A^2$ を形作用素 A の長さの平方, $h_{(3)} = \mathrm{Tr}\, A^3$ とするとき, 次の等式が成り立つ (M. Okumura [9] p.47 (2.6) 式参照):

命題 1

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\triangle h_{(2)} = \quad & |\nabla A|^2 + h_{ij}h_{;ij} - \tfrac{c}{4}h^2 + \tfrac{3}{2}c\mathrm{Tr}\,(A\phi A\phi) \\ & + \tfrac{(n+1)}{2}ch_{(2)} - h_{(2)}^2 + hh_{(3)} - \tfrac{3}{2}c|A\xi|^2 \\ & + \tfrac{3}{4}c\, h\, g(A\xi, \xi). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ただし $h_{;ij}$ は平均曲率の 2 階共変微分 $e_i(e_jh) - (\nabla_{e_i}e_j)h$ を表す. また同じ添字が現れる項はその添字に関して 1 から $2n-1$ まで和をとっているものとする.

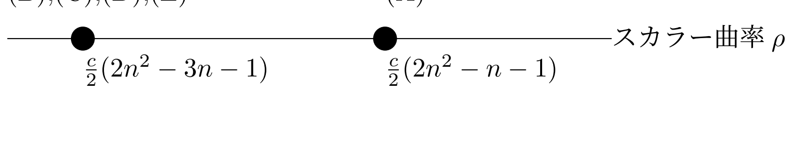
(2.1) は次の様に変形する事が出来る:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\triangle h_{(2)} = \quad & |\nabla^* A|^2 + h_{ij}h_{;ij} + (h_{(2)} + \tfrac{c}{4})\Big\{g(A\xi, \xi)h + \tfrac{(n-1)}{2}c \\ & -h_{(2)}\Big\} + \tfrac{3}{4}c|A\phi - \phi A|^2 + h\left\{h_{(3)} - g(A\xi, \xi)h_{(2)}\right. \\ & \left. -\tfrac{c}{4}h + \tfrac{c}{4}\, g(A\xi, \xi)\right\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし, $(\nabla_X^* A)Y = (\nabla_X A)Y + \frac{c}{4}\{\eta(Y)\phi X + g(\phi X, Y)\xi\}$.

特に M がコンパクト極小の場合 $(h = 0)$ には, (2.2) 式から $h_{(2)} \leq \frac{(n-1)}{2}c$ (これは $\rho \geq \frac{c}{2}(2n^2 - n - 1)$ と同値) ならば $|\nabla^* A|^2 = 0$, $|A\phi - \phi A|^2 = 0$ が導かれるので, 奥村氏の定理 ([8] 参照) より, M が (A) 型の等質実超曲面であることが導かれる.

ところで, 複素射影空間内の等質実超曲面のスカラー曲率は下図の様に分布している:

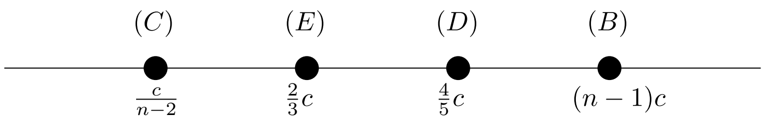


したがって (B)–(E) 型の極小等質実超曲面はスカラー曲率のみでは互いに識別出来ない. 一方構造ベクトル場に対応する主曲率 α についてはその平方 α^2 が次の様に分布している:

(A) 型

$$\alpha^2 = \frac{c}{4}\left(\sqrt{\frac{2p-1}{2q-1}} - \sqrt{\frac{2q-1}{2p-1}}\right)^2 \quad (p+q=n+1,\ 1 \leq q \leq n).$$

(B)–(E) 型



今回, 我々はコンパクト極小実超曲面の場合に次の特徴付け定理を得た:

定理 8 (N) M を $\mathbb{C}P_n(c)$ 内のコンパクト極小実超曲面とする. M の構造ベクトル場 ξ が主方向で, スカラー曲率 ρ および ξ に対応する主曲率 α が次の不等式をみたすとする:

$$\rho \geq \tfrac{c}{2}(2n^2-3n-1),$$
$$\alpha^2 \geq (n-1)c.$$

そのとき, $\rho = \frac{c}{2}(2n^2-3n-1)$, $\alpha^2 = (n-1)c$ で M は (B) 型の極小等質実超曲面である.

証明の概要: ξ-主方向の仮定の下で (2.1) は次の様に変形できる:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\triangle h_{(2)} = \ & |\nabla^{**}A|^2 + h_{ij}h_{;ij} + \tfrac{\alpha^2}{8}|A\phi + \phi A + \tfrac{c}{\alpha}\phi|^2 \\
& + h_{(2)}\left\{\alpha^2 + \tfrac{(n+1)c}{2} - h_{(2)} - \tfrac{c}{\alpha}h\right\} + h\left\{\tfrac{c}{\alpha}h_{(2)} + h_{(3)} - \tfrac{c}{4}h\right. \\
& \left. - \alpha(\alpha^2 + \tfrac{3}{4}c)\right\} + (\alpha^2 + c)\left\{\alpha^2 - \alpha h - c(n-1)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ただし

$$\begin{aligned}
(\nabla^{**}_X A)Y = \ & (\nabla_X A)Y + \tfrac{\alpha}{4}\{2\eta(X)(A\phi - \phi A)(Y) + \eta(Y)(A\phi - 3\phi A)(X) \\
& + g((A\phi - 3\phi A)X, Y)\xi\}.
\end{aligned}$$

M が極小で, $h_{(2)} \leq \frac{c}{2}(3n-1)$ (これは $\rho \geq \frac{c}{2}(2n^2-3n-1)$ と同値), $\alpha^2 \geq (n-1)c$ ならば, (2.3) より $|\nabla^{**}A|^2 = 0$, $|A\phi + \phi A + \frac{c}{\alpha}\phi|^2 = 0$. よって M は (B) 型の等質実超曲面であることが得られる.

今後の研究課題としては, 次の様な問題が考えられる:

問題１ (C)–(E) 型の等質実超曲面を特徴付けよ.

問題 2　上記 (A) 型, (B) 型の特徴付けにおいて, 極小の仮定を外して綺麗な特徴付け定理を作れ ((A) 型については多くの定理があるが, 曲率の挟撃の観点からの良い結果は少ない様に思われる).

問題 3　(C)–(E) 型の等質実超曲面の ∇A を計算せよ.

参考文献

[1] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **269**(1982), 481–499.

[2] S. S. Chern, M. do Carmo and S. Kobayashi, *Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length*, Functional analysis and related fields, Springer, (1970), 59–75.

[3] T. Gotoh, *Geodesic hyperspheres in complex projective space*, Tsukuba J. Math. **18**(1994), 207–215.

[4] U-Hang Ki, S. Nagai and R. Takagi, *Structure Jacobi operator of real hypersurfaces with constant scalar curvature in a nonflat complex space form*, Tokyo J. Math. **30**(2007), 441–454.

[5] H. B. Lawson Jr., *Rigidity theorems in rank-1 symmetric spaces*, J. Differential Geom. **4**(1970), 349–357.

[6] 前田定廣, 複素射影空間内の等質実超曲面について, 熊本工業大学研究報告　第 16 巻 (1992), 35–43.

[7] Y. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **28**(1976), 529–540.

[8] M. Okumura, *On some real hypersurfaces of a complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **212**(1975), 355–364.

[9] M. Okumura, *Compact real hypersurfaces with constant mean curvature of a complex projective space*, J. Differential Geom. **13**(1978), 43–50.

[10] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88**(1968), 62–105.

[11] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10**(1973), 495–506.