定傾曲線について

仲村梨恵子 (名城大学大学院　数学専攻　博士前期課程 1 年)

目的: 曲線が cylindrical helix (定傾曲線) であることと, 曲率と捩率の比が一定であることは同値であることを示す.

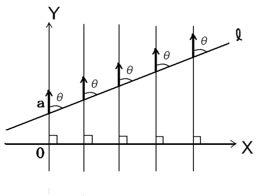
α を弧長パラメーターを s とする曲線とする.

$$\begin{array}{ccc} \alpha : I & \longrightarrow & \boldsymbol{R}^3 \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\cup & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\cup \\ s & \longmapsto & \alpha(s) \end{array}$$

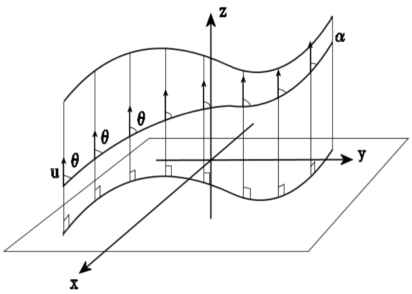
定義

$$\alpha : \text{cylindrical helix} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}u \in \boldsymbol{R}^3, \|u\| = 1$$
$$\left\langle \frac{d\alpha}{ds}(s), u \right\rangle : \text{定数} \quad \text{for} \quad {}^{\forall}s \in I$$

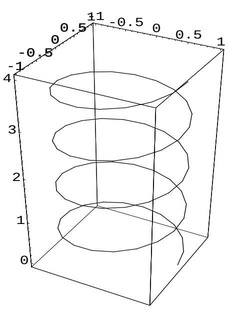
この定義の幾何学的意味について以下に述べる.



左の図のように XY 平面上に定ベクトル a を与え, a に平行な直線と一定角 θ を為す直線 ℓ をとる.



xy 平面上に任意の曲線を取り, その曲線と X 軸を重ね合わせ, さらに Y 軸方向が z 軸方向と一致するように左の図のように展開する. このとき, 直線 ℓ の像が α になる.



とくに, xy 平面上の曲線を円とするとき, cylndrical helix α は, らせんを描くことがわかる. 従って, cylndrical helix はらせんの一般化である.

ここで, 以下の定理の証明のため, フレネ - セレの公式を思い出そう.

- 接ベクトルを $T(s) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{d\alpha}{ds}(s)$,
- 曲率を $\kappa(s) \stackrel{\text{def}}{=} \|\dfrac{d^2\alpha}{ds^2}\|$,
- 法線ベクトルを $N(s) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{d^2\alpha}{ds^2}/\kappa(s)$,
- 従法線ベクトルを $B(s) \stackrel{\text{def}}{=} T(s) \times N(s)$,

とする. このときフレネ - セレの公式は,

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T(s) & N(s) & B(s) \end{pmatrix} = (T(s) \quad N(s) \quad B(s)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

である.

定理
曲率 κ が正である曲線 $\alpha : I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ に対して, α が cylindrical helix であることと曲率と捩率の比 $\dfrac{\tau}{\kappa}$ が一定であることは同値である.

証明
まず, α が cylndrical helix と仮定して曲率と捩率の比が一定 であることを示す.
cylndrical helix の定義より $\langle T(s), u\rangle = \cos\theta$(一定) となる. 両辺を微分しフレネ - セレの公式を用いると,

$$\begin{aligned} 0 = & \quad \frac{d}{ds}\langle T(s), u\rangle \\ = & \quad \left\langle \frac{dT}{ds}(s), u \right\rangle \\ = & \quad \kappa(s)\langle N(s), u\rangle \end{aligned}$$

となる. $\kappa(s) > 0$ より $\langle N(s), u\rangle = 0$. u は $N(s)$ に直交するので, u は接ベクトルと従法線ベクトルの張る平面上にある. よって,

$$u = \ell(s)\ T(s) + m(s)\ B(s)$$

となる. $\langle T(s), u\rangle = \cos\theta$, $\|u\| = 1$ より

$$\ell(s) = \cos\theta,\ m(s) = \sin\theta$$

となる. 従って,

$$u = \cos\theta\ T(s) + \sin\theta\ B(s).$$

と表示できる. この式の両辺を微分し, フレネ-セレの公式を用いると,

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\theta\ \frac{dT}{ds}(s) + \sin\theta\ \frac{dB}{ds}(s) \\ &= (\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta)\ N(s) \end{aligned}$$

となる.$N(s)$ の長さは 1 であるから,

$$\kappa(s)\cos\theta = \tau(s)\sin\theta$$

となる.$\kappa(s) > 0$ より,

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} : \text{定数}$$

となる.

次に逆を示す. 即ち, 曲率 κ と捩率 τ の比 $\frac{\tau}{\kappa}$ が一定であるならば, α が cylndrical helix であることを示す.

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} : \text{定数}$$

とする. $u = \cos\theta\ T(s) + \sin\theta\ B(s)$ とおく. 両辺を微分すると,

$$u' = (\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta)\ N(s) = 0$$

従って u は定ベクトルで $\|u\| = 1, < T(s), u >= \cos\theta$ となる. 従って α は cylndrical helix である.

□

3 次元ユークリッド空間内の任意の C^∞ 級曲線 $\alpha : I \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$(弧長によるパラメーター表示) に対して, $Darboux$ ベクトル場を

$$A(s) \stackrel{\text{def}}{=} \tau(s)\ T(s) + \kappa(s)\ B(s)$$

と定める. cylindrical helix に対してこの $Darboux$ ベクトル場を求めると,

$$A(s) = \frac{\kappa(s)}{\sin\theta}\ u$$

となり, 定ベクトル u の関数倍となることがわかる.